

2. Математическая модель потока с учетом аэродинамического дробления капель, столкновений капель между собой и с пленкой. Метод расчета.

В этой главе приводится полная система уравнений математической модели газокапельного потока в канале. Автором проведены оценки различных параметров потока, на основании чего в модели учитываются столкновения капель между собой и с пленкой, аэродинамическое дробление капель, теплообмен между каплями, газом и пленкой, действующие на каплю силы аэродинамического сопротивления и плавучести (Архимеда). Вязкость газа и жидкости учитывается только в процессе межфазного взаимодействия. Не учитываются сила тяжести, процессы внутри капли, теплообмен потока со стенкой канала, теплопроводность газа, излучение, фазовые переходы.

Некоторые введенные подмодели (столкновения капель с пленкой, коэффициентов трения пленки) определяются неоднозначно и требуют специального исследования для выбора наиболее соответствующей рассматриваемому классу течений. Подробно описаны модель пленки, модель столкновения капель друг с другом. При аэродинамическом дроблении капель автором учтено соотношение времени дробления и времени свободного пробега (пролета) капли.

2.1. Основные уравнения модели

Проблеме построения многожидкостных моделей газодисперсных потоков в научно-технической литературе уделено достаточно внимания, см., например, /3,13,42,52,55,83,93,125,140,230,232/, поэтому воспользуемся известными результатами, не вдаваясь во все подробности. Предполагается, что:

- среда является многоскоростной и многотемпературной, то есть в каждой точке имеются скорости и температуры как газа, так и капель;

- в элементарном объеме капель достаточно мало, чтобы не учитывать давление, создаваемое их хаотическим движением¹, но их достаточно много, чтобы рассматривать капли как сплошную среду.

Оценка минимального масштаба (в литературе может встречаться также термин «представительный элемент объема» или «характерный объем»), на котором применима модель сплошной среды, проведена в соответствии с /140/ и для наглядности представлена в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1.

Оценка минимального масштаба L применимости модели сплошной среды (допустимая погрешность ϵ в определении объемной концентрации капель равна 10 %)

$L \sim D_p \cdot (\epsilon^2 \cdot \alpha_p / 4)^{-1/3}$	$\alpha_p = 0.001$	$\alpha_p = 0.01$	$\alpha_p = 0.1$
$D_p = 10$ мкм	7,4 мм	0,34 мм	0,16 мм
$D_p = 100$ мкм	74 мм	3,4 мм	1,6 мм
$D_p = 300$ мкм	222 мм	10,2 мм	4,8 мм

Из сравнения результатов расчета сопла для так называемой базовой экспериментальной установки (см. п.1.2, рис.1.3) по одномерной модели с данными таблицы 2.1. следует, что для капель можно использовать модель сплошной среды. Для газа полагаем справедливым следующее уравнение состояния:

$$P_g = \rho_g \cdot R_g \cdot T_g, \quad (2.1)$$

где g – индекс параметров газа, P_g – давление газа, T_g – температура, ρ_g – плотность, R_g – газовая постоянная. Предполагая, что движение газа определяется взаимодействием с каплями, турбулентностью пренебрегаем.

При формулировке пространственной модели используем те же предположения, что и для одномерной, а именно: *пренебрегаем силой тяжести* (характерное значение числа Фруда $Fr \gg 1$) и *учитываем вязкость*

¹ Хаотическое движение капель вообще не рассматривается.

газа только в процессе межфазного взаимодействия (характерное значение числа Рейнольдса² $Re \sim 10^6$)³.

В согласии с доводами работы /42/ пренебрегаем теплопроводностью и излучением в газовой фазе. Теплопроводность не учитываем из-за больших чисел Пекле ($Pe \sim 10^5$)⁴. Пренебрежение излучением в газах основано на работе /115/, где показано, что даже при температурах более 1500 К доля излучения газов в переносе энергии составляет не более 15 % по сравнению с излучением частиц. Что касается излучения частиц (в нашем случае – капель), то оно составляет менее 1 % от конвективного теплообмена, и им можно пренебречь⁵.

² $Re = \rho_p \cdot L \cdot |W_g| / \mu_g$ – число Рейнольдса потока газа, вычисляемое по характерному масштабу.

³ Получение характерных значений чисел Рейнольдса и Фруда:

$$Re = \rho \cdot L \cdot |W| / \mu ; Fr = W^2 / (g \cdot L)$$

На входе в сопло скорость газа и капель порядка 10 м/с, плотность газа около 6 кг/м³. За характерный размер принимаем длину сопла (~ 0.2 м), $g = 10 \text{ м/с}^2$. В этом случае

$$Re = 6 \cdot 0.2 \cdot 10 / (1.85 \cdot 10^{-5}) = 6.47 \cdot 10^5 ; Fr = 10^2 / (10 \cdot 0.2) = 50$$

На выходе из сопла скорость газа и капель порядка 100 м/с, плотность газа около 1.2 кг/м³. За характерный размер принимаем длину сопла (~ 0.2 м). В этом случае

$$Re = 1.2 \cdot 0.2 \cdot 100 / (1.85 \cdot 10^{-5}) = 1.3 \cdot 10^6 ; Fr = 100^2 / (10 \cdot 0.2) = 5000$$

⁴ Оценка числа Пекле: $Pe = Pr \cdot Re$, $Pr = C_{p_gas} \cdot \mu_g / \lambda_g$

Для воздуха коэффициент теплопроводности $\lambda_g = 230 \cdot 10^{-4} \text{ ккал/(м} \cdot \text{час} \cdot \text{К)}$, также полагаем $C_{p_gas} = \text{const} = 0.242 \text{ кал/(г} \cdot \text{К)}$, (1 кал = 4.1868 Дж, для теплоемкости коэффициент пересчета 4186.8, для теплопроводности коэффициент пересчета в Вт/(м·К) равен 1.163) поэтому

$$Pr = 0.242 \cdot 4186.8 \cdot 1.85 \cdot 10^{-5} / (1.163 \cdot 230 \cdot 10^{-4}) = 0.701$$

и на входе в сопло $Pe = 6.47 \cdot 10^5 \cdot 0.242 \cdot 4186.8 \cdot 1.85 \cdot 10^{-5} / (1.163 \cdot 230 \cdot 10^{-4}) = 4.5 \cdot 10^5$,

на выходе из сопла $Pe = 1.3 \cdot 10^6 \cdot 0.242 \cdot 4186.8 \cdot 1.85 \cdot 10^{-5} / (1.163 \cdot 230 \cdot 10^{-4}) = 9.11 \cdot 10^5$.

⁵ Проведем максимальную оценку величины теплового излучения капли. Капля не может излучать (Q_{drop}) больше, чем абсолютно черное тело, энергетическая светимость которого определяется законом Стефана-Больцмана /86/ и равна $\xi \cdot T^4 \text{ Вт/м}^2$, где $\xi = 5.6682 \cdot 10^{-8}$ – постоянная Стефана-Больцмана. Соответственно определяется тепловое излучение из газа в каплю Q_g . Тогда

$$Q_{drop} = \pi \cdot D_p^2 \cdot \xi \cdot T_p^4, Q_g = \pi \cdot D_p^2 \cdot \xi \cdot T_g^4,$$

разность потоков равна

$$Q_{drop} - Q_g = \pi \cdot D_p^2 \cdot \xi \cdot (T_p^4 - T_g^4) = \pi \cdot D_p^2 \cdot \xi \cdot (T_p - T_g) \cdot (T_p + T_g) \cdot (T_p^2 + T_g^2).$$

Поток тепла за счет теплопроводности вычисляем по формуле /75,144/:

$$Q_\lambda = \pi \cdot (T_g - T_p) \cdot Nu \cdot \lambda_g \cdot D_p.$$

Следовательно,

$$(Q_{drop} - Q_{gas}) / Q_\lambda =$$

$$= \pi \cdot D_p^2 \cdot \xi \cdot (T_p - T_g) \cdot (T_p + T_g) \cdot (T_p^2 + T_g^2) / [\pi \cdot (T_g - T_p) \cdot Nu \cdot \lambda_g \cdot D_p] = D_p \cdot \xi \cdot (T_p + T_g) \cdot (T_p^2 + T_g^2) / [Nu \cdot \lambda_g].$$

Тогда максимальное излучение капли диаметром 200 мкм и температурой 300 К составит

$$Q_{drop} = \pi \cdot (200 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 5.6682 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 = 5.77 \cdot 10^{-5} \text{ Вт.}$$

Оценка количества воды, которая может испариться внутри сопла⁶, показала, что в пар перейдет не более 0.4 % общего расхода жидкости, поэтому это явление в рассматриваемых потоках можно не учитывать. Также не учитывается выделение из воды растворенных в ней газов⁷.

Из всех сил, действующих на каплю, учитываются только силы сопротивления и плавучести (Архимеда). Это предположение основывается на оценках сил, сделанных в работах /140,207/.

Как и в работах /42,55,93,140/, для некоторого объема, в котором поток характеризуется такими величинами, как скорость газа W_g (здесь и ниже жирным шрифтом выделены векторы), давление, температура и плотность газа, объемная концентрация газа α_g , скорость капель W_p , температура капель T_p , плотность капель ρ_p , объемная концентрация капель α_p , можно записать законы сохранения массы, импульса и энергии в интегральном виде⁸.

Соответственно поток тепла на каплю из газа с температурой 230 К составит

$$Q_g = \pi \cdot (200 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 5.6682 \cdot 10^{-8} \cdot 230^4 = 1.99 \cdot 10^{-5} \text{ Вт},$$

разность потоков равна

$$Q_{\text{drop}} - Q_g = 5.77 \cdot 10^{-5} - 1.99 \cdot 10^{-5} = 3.78 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$$

Поток тепла за счет теплопроводности вычисляем по формуле /75/:

$$Q_\lambda = \pi \cdot (T - T_p) \cdot Nu \cdot \lambda_g \cdot D_p = \pi \cdot 2 \cdot 230 \cdot 10^{-4} \cdot 1.163 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot (T - T_p) = 3.36 \cdot 10^{-5} \cdot (T - T_p) \text{ Вт}.$$

В итоге,

$$(Q_{\text{drop}} - Q_g) / Q_\lambda = 10^{-4} \cdot 5.6682 \cdot 10^{-8} \cdot 530 \cdot (300^2 + 230^2) / [2 \cdot 230 \cdot 10^{-4} \cdot 1.163] = 0.8 \cdot 10^{-2}.$$

⁶ Оценим максимальный расход пара, предположив, что в сопле давление паров воды максимальное, то есть равно давлению насыщенных паров при температуре 300 К. Плотность паров $\rho_v = 0.03 \text{ кг/м}^3$. Тогда максимальная оценка расхода пара $G_v = \rho_v \cdot |W_g| \cdot S_{\text{сопло}} = 0.03 \cdot 300 \cdot \pi \cdot 0.007 \cdot 0.007 = 0.0014 \text{ кг/с} = 1.4 \text{ г/с}$ где $S_{\text{сопло}}$ – максимальная площадь сечения сопла. То есть может испариться не более 0.4 % общего расхода жидкости.

⁷ Оценим количество растворенного в воде воздуха, который может выделиться в камере смешения и в сопле. Воспользуемся табличными данными /136/ и будем брать значения так, чтобы получить максимальную оценку. При 100 атм растворимость 1.7 г/л, при 1 атм – $2.04 \cdot 10^{-4} \text{ г/л}$. Используя линейную интерполяцию, можно оценить растворимость при 15 атм (давление наддува в системе подачи воды), она будет $1.7 \cdot 0.15 = 0.255 \text{ г/л}$. Следовательно, при максимальном расходе воды в экспериментальной установке 0.5 л/с дополнительный расход воздуха может составить 0.13 г/с, то есть, по максимальной оценке, $(0.13 \cdot 10) \cdot 100\% = 1.3\%$. Поэтому влиянием этого дополнительного расхода на параметры потока можно пренебречь.

⁸ В дифференциальной форме уравнения (2.2-2.7) перейдут в так называемые эйлеровы уравнения /11/.

Все капли делятся на несколько групп с номерами i от 1 до N .
Взаимодействие между группами описано в п.2.6.

Уравнение сохранения массы:

$$\partial[\int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot dv)_v] / \partial t = -\int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) ds)_S, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \partial[\int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot dv)_v] / \partial t = \\ = -\int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot (\mathbf{W}_{p_i} \cdot \mathbf{n}) ds)_S + \int ([\Delta M_{small_i} + \Delta M_{large_i}] \cdot dv)_v, \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\alpha_g + \sum (\alpha_{p_i})_{i=1, \dots, N} = 1, \quad (2.4)$$

где $\int (\dots)_v$ – интеграл по объему V , ограниченному поверхностью S , $\int (\dots)_S$ – интеграл по поверхности S , \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности S , ΔM_{small_i} – изменение массы за счет столкновения с более мелкими каплями (см. (2.62) п.2.6), ΔM_{large_i} – изменение массы за счет столкновения с более крупными каплями (см. (2.72) п.2.6).

Уравнение сохранения импульса для газа:

$$\begin{aligned} \partial[\int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot \mathbf{W}_g \cdot dv)_v] / \partial t = -\int (P_g \cdot \mathbf{n} \cdot ds)_S - \int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{W}_g \cdot ds)_S - \\ - \sum \{ \int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot [\mathbf{F}_{comp_i} + \mathbf{F}_{A_i}] \cdot dv)_v \}_{i=1, \dots, N}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где \mathbf{F}_{comp_i} – сила взаимодействия между каплями и газом, деленная на массу капли⁹, (см. (2.21) п.2.2),

\mathbf{F}_{A_i} – сила Архимеда, деленная на массу капли и вызванная тем, что капля находится в переменном поле давления¹⁰ (см. (2.23) п.2.3);

Уравнение сохранения импульса для капель:

$$\begin{aligned} \partial[\int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot \mathbf{W}_{p_i} \cdot dv)_v] / \partial t = \\ = -\int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot (\mathbf{W}_{p_i} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{W}_{p_i} \cdot ds)_S + \\ + \int \{ [\alpha_{p_i} \rho_p (\mathbf{F}_{comp_i} + \mathbf{F}_{A_i}) + (\Delta I_i + \sum (\Delta I_{fi})_{D_{pf} > D_{pi}})] \cdot dv \}_v, \end{aligned} \quad (2.6)$$

при $F_{if} > 0 \quad i=1, \dots, N$ или

$$\begin{aligned} \partial[\int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot \mathbf{W}_{p_i} \cdot dv)_v] / \partial t = \\ = -\int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot (\mathbf{W}_{p_i} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{W}_{p_i} \cdot ds)_S + \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁹ Масса капли определяется по формуле $m_p = \rho_p \cdot \pi \cdot D_p^3 / 6$. Фактически, здесь и далее D_p – диаметр капли в отсутствие внешних сил (сфера).

¹⁰ Следует отметить, что эта сила не всегда учитывается в моделях сопловых течений, обычно предполагается, что размеры капель или частиц много меньше расстояний, на которых существенно меняются макроскопические параметры фаз.

$$+ \int \{ [\alpha_{pi} \rho_p (\mathbf{F}_{\text{comp } i} + \mathbf{F}_{A i}) + (\Delta I_i + \Delta I) / M_{\text{new } i}] dv \}_v,$$

при $F_{if} < 0$, $i=1, \dots, N$

где ΔI_i , ΔI_{fi} , ΔI – изменение импульса капель в рассматриваемом объеме в результате столкновений (см. (2.66, 2.69, 2.75, 2.82) пп. 2.6.1.1, 2.6.1.2, 2.6.2.1, 2.6.2.2), F_{if} – коэффициент эффективности соударений (см. (2.97, 2.98) п.2.6.5).

Уравнение сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \partial \int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot E_g \cdot dv)_v / \partial t = \\ = - \int (\mathbf{P}_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) \cdot ds)_S - \int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) \cdot E_g \cdot ds)_S \\ - \sum \{ \int (\{ \alpha_{pi} \cdot \rho_p \cdot Q_{pi} + \alpha_{pi} \cdot \rho_p \cdot [\mathbf{F}_{\text{comp}} + \mathbf{F}_A]_i \cdot \mathbf{W}_{pi} \} \cdot dv)_v \}_{i=1, \dots, N}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где E_g , как и в работе /11/, определяется следующим образом:

$$E_g = P_g / (\rho_g \cdot (\kappa - 1)) + \mathbf{W}_g^2 / 2, \quad (2.9)$$

κ – показатель адиабаты, а Q_{pi} – тепловой поток между газом и каплями, который, определяется так /75/:

$$Q_{pi} = 6 \cdot (T_g - T_{pi}) \cdot Nu_i \cdot \lambda_g / (\rho_p \cdot D_{pi}^2), \quad (2.10)$$

здесь λ_g – коэффициент теплопроводности газа (Вт/(м·К)), Nu – число Нуссельта, характеризующее режим теплообмена /42, 219/:

$$Nu = 2 + 0.459 \cdot Re_{pi}^{0.55} \cdot Pr^{0.33}, \quad (2.11)$$

где $Re_{pi} = \rho_g \cdot D_{pi} \cdot |\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_{pi}| / \mu_g$ – относительное число Рейнольдса для капель, $Pr = C_{p_gas} \cdot \mu_g / \lambda_g$ – число Прандтля, C_{p_gas} – теплоемкость газа при постоянном давлении (Дж/(кг·К)), μ_g – вязкость газа (кг/(м·с)). Также полагаем, что температура капель меняется по закону:

$$\begin{aligned} \partial \int (\alpha_{pi} \cdot \rho_p \cdot C_{part} \cdot T_{pi} \cdot dv)_v / \partial t = \\ = - \int (\alpha_{pi} \cdot \rho_p \cdot C_{part} \cdot T_{pi} \cdot (\mathbf{W}_{pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot ds)_S + \int ([\alpha_{pi} \cdot \rho_p \cdot Q_{pi} + \Delta Q_i] \cdot dv)_v, \quad i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.12)$$

где C_{part} – теплоемкость вещества капли, ΔQ_i – теплообмен в результате столкновений капель (см. (2.85) п.2.6.3). То есть в объеме, ограниченном поверхностью S , происходит осреднение температуры капель. В расчетах *физические характеристики веществ считались постоянными. Значения*

этих величин приведены в таблице 2.2. Процессы внутри капли не учитываются, то есть *капля полагается однородной*.

В работе Л.Е.Стернина и А.А.Шрайбера /140/ отмечается, что влияние теплового взаимодействия фаз на параметры течения в соплах значительно слабее, чем влияние аэродинамического сопротивления, столкновений и пленки, поэтому более детальная информация о межфазном теплообмене, как и о теплообмене внутри фазы, не рассматривается (см. также /42/).

Таблица 2.2.

Характеристики воды и воздуха, используемые в расчетах /20/.

	Вода	Воздух
динамическая вязкость, кг/(м·с)	$\mu_p = 1.15 \cdot 10^{-3}$	$\mu_g = 1.85 \cdot 10^{-5}$
теплоемкость, кал/(г·К)	$C_{part} = 1$	$C_{p\ gas} = 0.242$
теплопроводность, ккал/(м·час·К)	$\lambda_p = 230 \cdot 10^{-4}$	$\lambda_g = 230 \cdot 10^{-4}$
показатель адиабаты		$\kappa = 1.4$
газовая постоянная		$R_g = 287$
коэффициент поверхностного натяжения, Н/м	$\sigma = 0.075$	
плотность, кг/м ³	$\rho_p = 1000$	
теплота фазового перехода при 10°С, ккал/кг	$L_p = 590$	
температуропроводность, м ² /с	$a_p = \lambda_p / (C_{part} \cdot \rho_p) = 0.64 \cdot 10^{-7}$	
Примечание: 1 кал = 4.1868 Дж, для теплоемкости коэффициент пересчета в Дж/(кг·К) равен 4186.8, для теплопроводности коэффициент пересчета в Вт/(м·К) равен 1.163		

Основным объектом в экспериментальных исследованиях и в практических приложениях является поток в осесимметричном сопле, поэтому для численного моделирования удобна цилиндрическая система координат. Подача газа и жидкости в сопло организована с максимальной осевой симметрией, поэтому в математической модели поток полагается осесимметричным.

Для замыкания системы необходимы условия на границах. В качестве базовых граничных условий, использовавшихся в большинстве случаев, были выбраны следующие:

- на входе в сопло известны и постоянны вдоль радиуса давление и температура газа и капель, диаметр капель, заданы массовые расходы воды и воздуха, а также скорости газа и капель, объемная концентрация капель в зависимости от радиуса сопла. Скорости и концентрации подбирались так, чтобы соответствовать экспериментальным данным (расходам и средним скоростям воды и воздуха);
- на открытой границе расчетной области¹¹ известны параметры окружающей среды (давление, температура), для других величин используется экстраполяция изнутри расчетной области, так называемый снос параметров¹². Также может быть задано давление у среза сопла;
- на оси используется условие непротекания, что следует из осевой симметрии потока, фактически это также снос параметров, но при этом радиальная составляющая скорости равна 0;
- на жесткой стенке для газа и капель ставится условие непротекания (равенство нулю нормальной к стенке составляющей скорости); для других параметров – равенство нулю нормальной производной;
- при наличии пленки ставятся специальные условия (см. ниже п.2.5.2).

В некоторых вариантах расчетов часть граничных условий была изменена, как именно – оговаривается в каждом конкретном случае.

За начальные данные, соответствующие моменту времени t_0 , чаще всего принимались параметры окружающей среды (атмосферные условия), а

¹¹ В расчетную область входит, помимо объема, ограниченного стенками сопла, зона у среза сопла.

¹² При использовании этих условий в чисто газовых потоках происходит отражение возмущений от открытых границ, что увеличивает время расчета. Проблеме построения неотражающих граничных условий в научно-технической литературе в последнее время уделяется много внимания (см. упомянутую в работе М.А.Ильгамова и А.Н.Гильманова /61/ библиографию). Однако в нашем случае дискретная фаза очень сильно гасит отраженные возмущения, поэтому экстраполяции оказывается вполне достаточно.

для капель задавались минимальные скорость (менее 0,1 м/с) и объемная концентрация ($\sim 10^{-6}$).

2.2. Сила аэродинамического сопротивления

В качестве основной силы взаимодействия между газом и каплями, в соответствии с оценками работ /140,207/ рассматривается только сила аэродинамического сопротивления. Для сферы в равномерном потоке газа эта сила, деленная на массу капли, рассчитывается по формуле (см., например, /19,207/):

$$F_{\text{сопр}}^* = (\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p) \cdot |\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p| \cdot C_{d0} \cdot \rho_g \cdot 3 / (4 \cdot \rho_p \cdot D_p) \quad (2.13)$$

Для коэффициента сопротивления существуют различные формулы, однако в интересующем нас диапазоне параметров ($D_p < 500$ мкм, $|\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p| < 100$ м/с), как следует, например, из работы /42/, отличие этих формул невелико, поэтому в расчетах используется формула /68/:

$$C_{d0} = 24 / \text{Re}_p + 4.4 / \text{Re}_p^{0.5} + 0.32. \quad (2.14)$$

Для очень мелких капель используется поправка Милликена на разреженность газа, как в работе /140/:

$$C_{d_{Kn}} = \{1 + Kn \cdot [1.252 + 0.399 \cdot \exp(-1.1 / Kn)]\}^{-1}, \quad (2.15)$$

здесь число Кнудсена $Kn = \text{line} / D_p$, line – средняя длина свободного пробега молекул газа¹³.

Так как в потоке газа мы имеем дело не с единичной жесткой сферой, а с набором капель, то для коэффициента сопротивления требуется ряд дополнительных поправок. Наиболее существенны следующие:

¹³ Оценка числа Кнудсена: $Kn = \text{line} / D_p$,

$\text{line} = 0.707 / (N \cdot \pi d^2)$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, N – число молекул в см^3 газа, d – средний диаметр молекулы (см). Для воздуха при нормальных условиях

$$\text{line} = 0.707 / [2.568 \cdot 10^{19} \cdot \pi \cdot (3.1 \cdot 10^{-8})^2] = 9.12 \cdot 10^{-6} \text{ см}$$

При постоянной температуре справедливо следующее соотношение /212/:

$$P_1 \cdot \text{line}_1 = P \cdot \text{line},$$

Поэтому на входе в сопло $\text{line}_1 = P \cdot \text{line} / P_1 = 1 \cdot 9.12 \cdot 10^{-6} / 6 = 1.52 \cdot 10^{-6}$ см.

Соответственно для капель диаметром 30 мкм ($3 \cdot 10^{-3}$ см) на входе в сопло $Kn = 0.5 \cdot 10^{-3}$, а на выходе: $Kn = 3 \cdot 10^{-3}$.

- поправка В.Е.Алемасова и др. на деформацию капли, как, например, в работе /140/:

$$C_{We} = 15 \text{ при } We > 30, \quad (2.16)$$

$$C_{We} = \exp(0.03 \cdot We^{1.5}) \text{ при } We \leq 30,$$

где $We = \rho_g \cdot |\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p|^2 \cdot D_p / \sigma$ – число Вебера, σ – коэффициент поверхностного натяжения вещества капли (для воды $\sigma = 0.075$ Н/м, см. Таблицу 2.2),

- поправка на сжимаемость газа /63/, так как в некоторых зонах или на некоторых режимах скорость газа может приближаться или даже превосходить скорость звука в газе:

$$C_{d_{press}} = 1 + \exp(0.427/M_p^{4.63} - 3/Re_p^{0.88}), \quad (2.17)$$

где $M_p = |\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p|/a_g$ и $a_g = (\kappa \cdot R_g \cdot T_g)^{0.5}$ – скорость звука в газе;

- поправка на взаимовлияние капель (на стесненность потока), так как известно /35,93,137,216/, что присутствие других капель (частиц) меняет силу сопротивления¹⁴, причем эта поправка определяется неоднозначно (см. рис.2.1):

$$C_{\alpha p} = 2 \cdot (0.5 + \alpha_p) / (1 - \alpha_p) \quad (2.18)^{15}$$

$$C_{\alpha p} = 1 / (1 - \alpha_p)^x \quad (2.19)^{16}$$

$$C_{\alpha p} = 2 \cdot (0.5 + 1.76 \cdot \alpha_p^{1.85}) \quad (2.20)^{17}$$

Таким образом, сила аэродинамического сопротивления капли вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} F_{сопр} &= C_{d0} \cdot C_{d_{Kn}} \cdot C_{We} \cdot C_{d_{press}} \cdot C_{\alpha p} \cdot F_{сопр}^* = \\ &= C_{d0} \cdot C_{d_{Kn}} \cdot C_{We} \cdot C_{d_{press}} \cdot C_{\alpha p} \cdot (\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p) \cdot |\mathbf{W}_g - \mathbf{W}_p| \cdot \rho_g \cdot 3 / (4 \cdot \rho_p \cdot D_p) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Проблема взаимовлияния капель и величина силы аэродинамического сопротивления в потоке с большой долей дискретной фазы могут быть предметом дополнительных исследований и обсуждения. Например,

¹⁴ В работе /52/ отмечается, что сила сопротивления капли может превышать рассчитанную для сферы на порядок. Это связано с тем, что в результате распада крупных капель и столкновений форма фрагментов жидкости сильно отличается от сферической.

¹⁵ зависимость Зубера, на которую ссылаются авторы /137/

¹⁶ $1 < x < 5$ в соответствии с работой /216/, или $x = 2.7$ в соответствии с работой /93/, или $x = 16$ в соответствии с работой /57/

¹⁷ в соответствии с работой /137/

известно [18,137], что сила сопротивления сильно зависит от того, как расположены капли друг относительно друга.

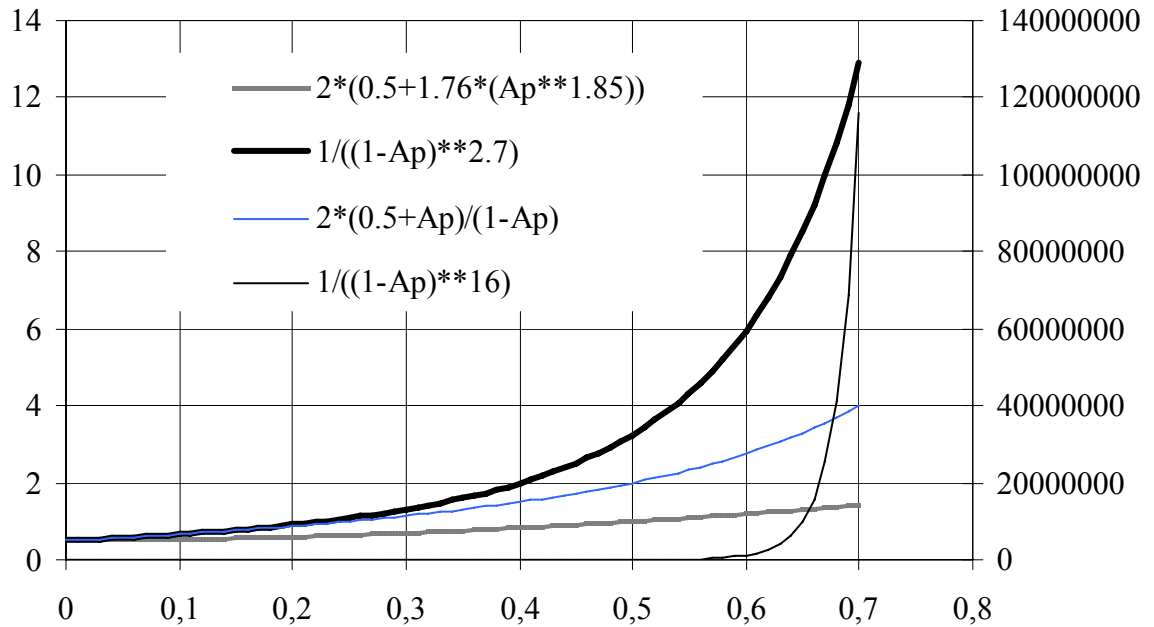


Рис.2.1. Изменение поправки на стесненность потока к коэффициенту аэродинамического сопротивления капли. Значения поправки (2.19) с показателем степени 16 определяются по правой шкале, значения остальных поправок – по левой.

2.3. Сила Архимеда (плавучести) или учет неравномерного давления в потоке на движение капли

Коэффициент сопротивления сферы и большинство поправок к нему определены для случая, когда сферу обтекает практически бесконечный равномерный поток. В этой ситуации внешний градиент давления отсутствует, в то время как в сопле он может достигать значительных величин. Если предположить, что в сечении потока газа, проходящем по носику сферы, давление равно P_1 , а в сечении кормы P_2 , то можно определить

силу, действующую на сферу в результате перепада давления (подробно см. Приложение 4):

$$F_A^* = (\pi/6) \cdot D_p^2 \cdot (P_1 - P_2) = (\pi/6) \cdot D_p^3 \cdot \text{grad}(P) \quad , \quad (2.22)$$

где $\text{grad}(P)$ – градиент давления в потоке. Тогда на единицу массы действует сила /134/

$$F_A = \text{grad}(P)/\rho_p \quad . \quad (2.23)$$

Сила Архимеда F_A учитывается как дополнительное слагаемое к силе аэродинамического сопротивления $F_{\text{сопр}}$ и определяется по формуле (2.23).

2.4. Об учете ускоренного движения капли

В работе Л.Е.Стернина и А.А.Шрайбера /140/ дан краткий обзор по работам об определении аддитивной поправки (слагаемого) к коэффициенту сопротивления сферы, если та движется при переменной относительной скорости. Эта поправка определяется через безразмерное ускорение в относительном движении:

$$A = (D_p/|W_g - W_p|^2) \cdot d(W_g - W_p)/dt \quad , \quad (2.24)$$

которое составляет величину порядка 10^{-2} для базового потока¹⁸. По данным К.Кроу, Дж.Николса и Р.Моррисона (1963 г.), подтверждаемым измерениями Э.Марчилдана и У.Говена (1979 г.), дополнительное слагаемое к коэффициенту сопротивления сферы есть величина порядка $O(Cd_0)$ и в нашем случае не отличается от последнего более, чем на 10 %. При этом у разных

¹⁸ По оценкам, сделанным в экспериментах, максимальный средний диаметр каплей не превосходит 400 мкм. По результатам расчетов (см. Приложение 24), разница скоростей газа и каплей в зоне максимального изменения этой разности составляет около 60 м/с. Относительное ускорение (максимальное у выхода потока из сопла) равно отношению изменения относительной скорости ко времени пролета капли зоны у выхода из сопла:

$$d(W_g - W_p)/dt = \Delta(W_g - W_p)/\Delta t = (80 - 10)/(0.02/120) = 4.2 \cdot 10^5.$$

Соответственно A , определяемое по формуле (2.24), есть

$$A = 400 \cdot 10^{-6} \cdot 4.2 \cdot 10^5 / 60^2 = 4.7 \cdot 10^{-2},$$

при этом максимальное число Рейнольдса для капли:

$$Re_p = D_p \cdot (W_g - W_p) \cdot \rho_g / \mu_g = 400 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 7 / (1.5 \cdot 10^{-5}) = 1.12 \cdot 10^4.$$

По данным Э.Марчилдана и У.Говена (1979 г.), при таких Re_p и ускорении до 210 м/с² коэффициент сопротивления изменяется не более чем на 10 %.

авторов (Д.Петрак (1978 г.), Ф.Брифф (1981 г.), С.Темкин и Г.Мета (1982 г.)) может быть разным знак этой аддитивной поправки.

Таким образом, вопрос об изменении коэффициента сопротивления в случае ускоренного движения капли остается пока открытым и в данной работе не рассматривается.

2.5. Модель пленки , текущей по стенке сопла

Проблемы, связанные с течением пленки, взаимодействием газа, капель и пленки освещены во множестве работ (см., например, /16,40,41,48,50,98,126,144,153,209,217,221,225,229,230,232,233,244/ и приведенную в этих работах библиографию). Мы используем только некоторые работы, которых, однако, достаточно для нашего исследования.

2.5.1. Основные положения модели пленки

При высокой концентрации капель, если не принимать специальных мер, неизбежно выпадение части жидкости на стенку в виде пленки. Важный вопрос – характер течения пленки. В зависимости от потенциальной поверхностной энергии взаимодействия и расхода жидкости в пленке возможно течение сплошным слоем или ручьями. Для простоты предположим, что стенка сопла абсолютно смачиваемая и пленка течет сплошным слоем.

Экспериментальные данные /43,44/ показывают, что, когда жидкость переходит в поток только в результате ударов капель о пленку или срыва с гребней пленочных волн, от пленки невозможно избавиться даже при скорости газа $M \approx 2$. В рассматриваемых соплах, по экспериментальным и расчетным данным /29,185,211/, скорость газа только в отдельных зонах может несколько превышать скорость звука ($M < 1.2$), поэтому полагаем, что, раз образовавшись, пленка так и течет до среза сопла, возможно,

ультратонким слоем¹⁹. В связи с этим не рассматриваем модели и экспериментальные данные о взаимодействии капель с не смоченной поверхностью²⁰.

Так как эксперименты проводились на воде и воздухе, то в дальнейшем будем использовать соответствующие экспериментальные данные и физико-химические характеристики только этих веществ, оставляя в стороне вопросы влияния вязкости, поверхностного натяжения, смачиваемости и т.п. на параметры пленки.

Предполагается использование экспериментальных данных о зависимости коэффициентов трения и теплообмена от средних характеристик пленки²¹, поэтому достаточно рассмотреть одномерное течение пленки. Такой постановкой ограничиваемся также и потому, что даже без учета пленки расчет на однопроцессорных ЭВМ идет достаточно долго. Для расчета соплового потока будет использоваться нестационарный сеточный метод, поэтому логично и параметры пленки рассчитывать в зонах, соответствующих ячейкам расчетной сетки (элементам объема), и на конечном временном интервале Δt . На рис.2.2 приведена схема течения пленки с учетом всего вышесказанного. Приближаем элемент поверхности

¹⁹ В рассматриваемых потоках фазовые переходы практически отсутствуют, поэтому испарением пленки пренебрегаем. Это подтверждается следующей оценкой.

Оценим максимальное количество энергии в секунду, которое может потратить пленка на испарение. Положим, что перепад температуры между поверхностью пленки и газом составляет 100 К, что превышает реальный. За радиус сопла примем максимальный, равный 7 мм. Тогда коэффициент теплообмена α_T есть

$$\alpha_T = \frac{0.023 \cdot (Re_D)^{0.8} \cdot (Pr)^{0.4} \cdot \lambda_g / (2 \cdot R_{nozzle})}{0.023 \cdot (\rho_g \cdot 2 \cdot R_{nozzle} \cdot |W_g| / \mu_g)^{0.8} \cdot (C_{p_gas} \cdot \mu_g / \lambda_g)^{0.4} \cdot \lambda_g / (2 \cdot R_{nozzle})} = 0.023 \cdot [7 \cdot 2 \cdot 0.007 \cdot 300 / (1.5 \cdot 10^{-5})]^{0.8} \cdot [4186.8 \cdot 0.242 \cdot 1.5 \cdot 10^{-5} / (230 \cdot 1.163 \cdot 10^{-5})]^{0.4} \cdot 230 \cdot 1.163 \cdot 10^{-5} / (2 \cdot 0.007) = 952.$$

Тогда через поверхность сопла длиной 200 мм будет идти тепловой поток интенсивности

$$\Delta Q / \Delta t = \alpha_T \cdot (T_{gas} - T_{border}) \cdot S = 952 \cdot 100 \cdot 2\pi \cdot 0.007 \cdot 0.2 = 837 \text{ Дж/с}$$

С учетом теплоты парообразования I , равной 540 ккал/кг (минимальное значение для рассматриваемого течения), массовый расход пара от пленки составит

$$G_v = (\Delta Q / \Delta t) / I = 837 / (540 \cdot 4186.8) = 3.7 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} = 0.37 \text{ г/с}$$

Таким образом, даже при расходе воды в пленке 10 г/с, испариться может не более 4 % расхода.

²⁰ О взаимодействии капель с твердой поверхностью см., например, /31/.

²¹ Такой подход аналогичен использованному в /16/ и не предполагает явного отслеживания волн на поверхности пленки. Для моделирования формы поверхности пленки подойдут методы, изложенные, например, в /23,64,153,226/.

пленки прямой АВ и рассматриваем силы и скорости в проекции на эту прямую²².

Для удобства граница расчетной области проходит не по стенке канала, а по кривой, сглаживающей поверхность пленки, поэтому считаем силы трения и скорость пленки параллельными границе расчетной области. Толщина пленки – расстояние от стенки до поверхности пленки в направлении нормали к поверхности.

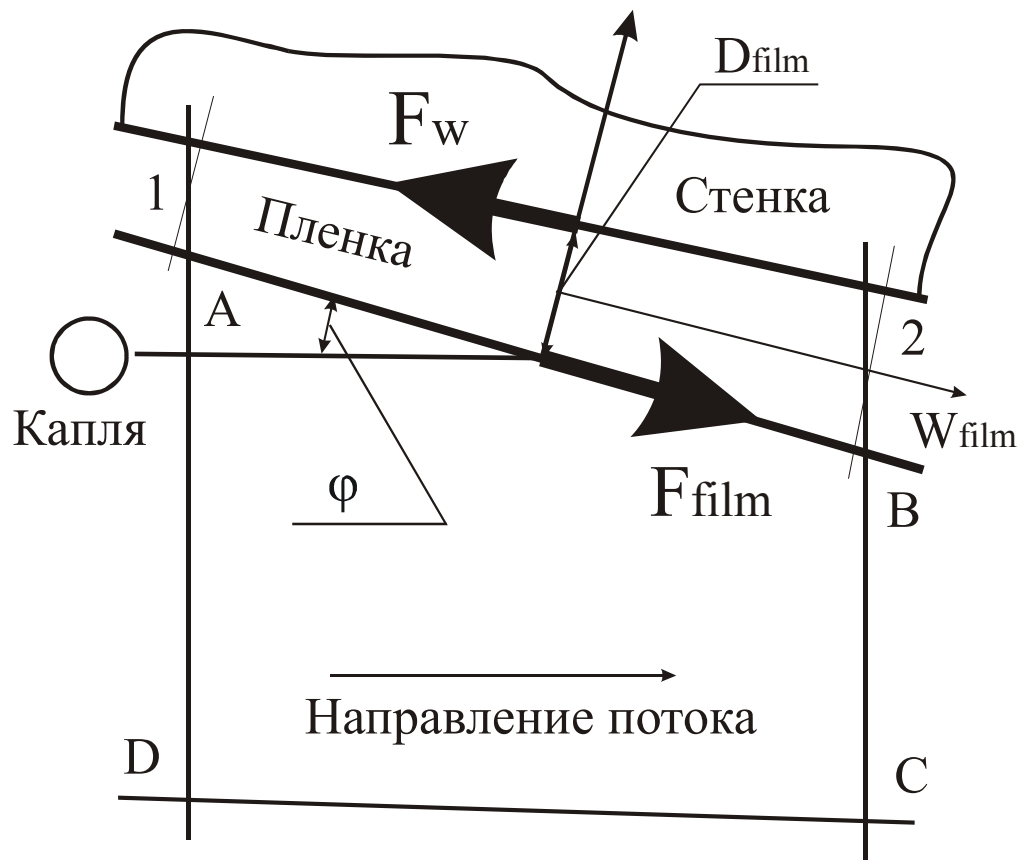


Рис.2.2. Схема течения пленки. ABCD – ячейка расчетной сетки; F_w – сила трения пленки о стенку; F_{film} – сила трения газа о пленку; W_{film} – скорость пленки; D_{film} – толщина пленки; φ – угол столкновения капли с пленкой.

Нормаль к поверхности пленки направлена в сторону стенки.

С течением времени на участке 1-2 изменение массы пленки произойдет за счет втекания жидкости слева ($\rho_p \cdot W_{film\ 1} \cdot S_{film\ 1}$), вытекания

²² Здесь учитывается осевая симметрия пленки.

справа ($\rho_p \cdot W_{\text{film } 2} \cdot S_{\text{film } 2}$), выпадения капель группы i из потока ($G_{\text{in } i} = \rho_p \cdot \alpha_{pi} \cdot W_{pn i} \cdot S_{12}$), отражения части ударившихся о пленку капель ($K_{\text{refr } i} \cdot G_{\text{in } i}$, где $K_{\text{refr } i}$ – коэффициент отражения или доля отскочивших капель) и срыва капель с гребней поверхностных волн (ΔM_{out}):

$$\begin{aligned} \rho_p \cdot (V_{t+\Delta t} - V_t) = \\ = \Delta t \cdot [\rho_p \cdot W_{\text{film } 1} \cdot S_{\text{film } 1} - \\ - \rho_p \cdot W_{\text{film } 2} \cdot S_{\text{film } 2} + \rho_p \cdot S_{12} \cdot \Sigma(\alpha_{pi} \cdot W_{pn i} \cdot (1 - K_{\text{refr } i}))_{i: W_{pn i} > 0} - \Delta M_{\text{out}}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $V_{t+\Delta t}$, V_t – объем пленки на моменты времени $t+\Delta t$ и t соответственно, S_{12} – площадь граничной поверхности ячейки расчетной сетки, $W_{pn i}$ – нормальная составляющая скорости капель к пленке (если капли летят от стенки, то слагаемое с $W_{pn i}$ не учитывается), ρ_p – плотность жидкости, α_{pi} – объемная концентрация капель в потоке у поверхности пленки, $S_{\text{film } 1}$ и $S_{\text{film } 2}$ – площади поперечных сечений пленки в зонах 1 и 2, $W_{\text{film } 1}$ и $W_{\text{film } 2}$ – скорости пленки в соответствующих сечениях (эти скорости параллельны поверхности пленки), $\Sigma(\dots)_x$ означает суммирование по всем группам, для которых выполнено условие x . Изменением объема жидкости за счет испарения, растворения или выделения газов пренебрегаем.

Импульс пленки меняется за счет притока-оттока массы с соответствующей скоростью, а также из-за перепада давления и сил трения (пренебрегаем массовыми силами, так как они значительно меньше сил трения и сопротивления):

$$\begin{aligned} \rho_p \cdot [(W_{\text{film}} \cdot V)_{t+\Delta t} - (W_{\text{film}} \cdot V)_t] = \\ = \Delta t \cdot [\rho_p \cdot W_{\text{film } 1} \cdot S_{\text{film } 1} \cdot W_{\text{film } 1} - \rho_p \cdot W_{\text{film } 2} \cdot S_{\text{film } 2} \cdot W_{\text{film } 2} + \\ + \rho_p \cdot S_{12} \cdot \Sigma(\alpha_{pi} \cdot W_{pn i} \cdot W_{p\tau i})_{i: W_{pn i} > 0} - \rho_p \cdot S_{12} \cdot \Sigma(\alpha_{pi} \cdot W_{pn i} \cdot K_{\text{refr } i} \cdot W_{p\text{refr } i})_{i: W_{pn i} > 0} - \\ - \Delta M_{\text{out}} \cdot W_{\text{film}} + F_{\text{film}} \cdot S_{12} - F_w \cdot S_{w12} \cdot \cos(\gamma) + P_1 \cdot S_{\text{film } 1} - P_2 \cdot S_{\text{film } 2} + P_{12} \cdot S_{w12} \cdot \sin(\gamma)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $W_{p\tau i}$ – составляющая скорости капель, параллельная поверхности пленки, $W_{p\text{refr } i}$ – параллельная поверхности пленки составляющая скорости отскочивших (выбитых) капель, P_1 и P_2 – давление в пленке в соответствующих сечениях, P_{12} – среднее давление над пленкой на участке 1-2, γ – угол между стенкой и поверхностью пленки, S_{w12} – площадь

поверхности стенки канала на участке 1-2 ($S_{12}=S_{w12}\cdot\cos[\gamma]$), $\sin(\gamma)=(D_{film 2}-D_{film 1})/\Delta L$ (ΔL - расстояние по поверхности стенки между сечениями 1 и 2). Здесь предполагается, что сорванные газом капли имеют скорость пленки. Так как рассматривается одномерная модель пленки, то нормальные составляющие скорости отскочивших и сорванных капель не учитываются в уравнениях пленки. Однако их надо учитывать в уравнениях для дискретной фазы.

Температура пленки определяется из соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_p \cdot (V_{t+\Delta t} \cdot C_{part} \cdot T_{film t+\Delta t} - V_t \cdot C_{part} \cdot T_{film t}) = \\ = \Delta t \cdot [\rho_p \cdot W_{film 1} \cdot S_{film 1} \cdot C_{part} \cdot T_{film t} - \rho_p \cdot W_{film 2} \cdot S_{film 2} \cdot C_{part} \cdot T_{film t} + \\ + \rho_p \cdot S_{12} \cdot \Sigma(\alpha_{p i} \cdot W_{p n i} \cdot (1 - K_{refr i}) \cdot C_{part} \cdot T_{p i})_{i: W_{p n i} > 0} - \Delta M_{out} \cdot C_{part} \cdot T_{film t}] \end{aligned} \quad (2.27)$$

где C_{part} – теплоемкость вещества капли и пленки, T_{film} – температура пленки, $T_{p i}$ - температура капель. Полагаем, что работа силы трения между пленкой и газом идет в газ, стенка теплоизолирована.

Силу трения пленки о стенку определим аналогично работе /16/:

$$F_w = C_w \cdot \rho_p \cdot W_{film}^2 / 2, \quad (2.28)$$

где C_w – коэффициент трения. Оценка работы силы трения²³ показывает, что ее влиянием на температуру пленки можно пренебречь.

Теплообмен между газом и пленкой описывается соотношением /139/:

$$\Delta Q = \Delta t \cdot \alpha_T \cdot (T_{gas} - T_{border}) \cdot S, \quad (2.29)$$

²³ Оценим работу силы трения F_w жидкости о стенку на всей длине сопла. Примем скорость пленки в канале 30 м/с. Так как в потоке с большим содержанием капель пленка постоянно испытывает удары, то течение в ней можно считать турбулентным и, в соответствии с работой Уоллиса /147/, полагаем $C_w = 0.005$. Тогда

$$F_w = 0.005 \cdot 1000 \cdot (30 \cdot 30) / 2 = 2.5 \cdot 9 \cdot 100.$$

При длине сопла $L=0.2$ метра и максимальном диаметре 14 мм оценка площади стенок канала

$$S_{w \max} = 7 \cdot 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot L = 0.0088 \text{ м}^2.$$

Следовательно, величина работы силы трения меньше

$$F_w \cdot S_{w \max} \cdot W = 22.5 \cdot 100 \cdot 88 \cdot 10^{-4} \cdot 30 = 600 \text{ Дж/с}.$$

При расходе воды в пленке 100 г/с, что значительно меньше экспериментальных данных для базового режима течения, для изменения температуры пленки на 1° надо около 420 Дж/с. Т.о. влиянием работы силы трения о стенку на температуру пленки можно пренебречь.

где α_T – коэффициент теплообмена, T_{gas} – температура газа, T_{border} – температура границы пленки, S – площадь поверхности пленки. Коэффициент теплообмена вычисляется по соотношению /144/:

$$\alpha_T = 0.023 \cdot (Re_D)^{0.8} \cdot (Pr)^{0.4} \cdot \lambda_g / (2 \cdot R_{nozzle})$$

где

$Pr = C_{p_gas} \cdot \mu_g / \lambda_g$ – число Прандтля,

$Re_D = \rho_g \cdot 2 \cdot R_{nozzle} \cdot |W_g| / \mu_g$ – число Рейнольдса потока газа, вычисляемое по диаметру канала и средней скорости течения,

$T_{border} = (T_{film} \cdot \lambda_p / D_{film} + T_g \cdot \alpha_T) / (\lambda_p / D_{film} + \alpha_T)$.

Сила трения газа о пленку определяется в соответствии с /16/:

$$F_{film} = C_{film} \cdot \rho_g \cdot (W_{gas \tau} - W_{film})^2 / 2, \quad (2.30)$$

где C_{film} – коэффициент трения, $W_{gas \tau}$ – составляющая скорости газа, параллельная поверхности пленки. Вся работа силы трения F_{film} между газом и пленкой идет в газ.

Основная проблема в такой модели пленки – определение коэффициентов трения, отражения капель и уноса жидкости газом. Исследования в этой области весьма обширны (см., в частности, /40,41,50,69,117,147,229,235,236/), но касаются, в основном, трубных течений или потоков на плоскости, поэтому полученные результаты требуют проверки на возможность использования в рассматриваемых нами потоках. Для задания коэффициентов трения ограничимся данными работ /7,16,147,228/, которые отражают наиболее характерные подходы:

$$\Gamma \left| 0.005^{24} \text{ – для турбулентного режима течения /147/,} \right. \quad (2.31)$$

$$C_w = \left| 0.577 \cdot 10^{-9} \cdot Re_z^{0.981}, 7 \cdot 10^6 < Re_z < 11 \cdot 10^6 \text{ – по работе /7/,} \right. \quad (2.32)$$

$$\left| 0.3164 / Re_{film}^{0.25} \text{ – формула Блазиуса из работы /16/,} \right. \quad (2.33)$$

L

где

$Re_z = W_{film} \cdot \rho_p \cdot z / \mu_p$, z – расстояние вниз по потоку от точки появления пленки,

²⁴ Этому значению, как будет показано ниже, отдано предпочтение.

μ_p – коэффициент динамической вязкости жидкости,

$$Re_{film} = W_{film} \cdot \rho_p \cdot D_{film} / \mu_p .$$

Коэффициент трения газа о пленку

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} 0.02 \cdot (1 + 180 \cdot D_{film} / R_{nozzle}) \text{ - по данным /147/,} \\ 0.0791 / Re_D^{0.25} \text{ - по /228/,} \\ 0.007 \cdot [1 + 0.29 \cdot (Re_{film} - 93)] \text{ для } 93 < Re_{film} < 720 \text{ - по /7/,} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

$$C_{film} = \left\{ \begin{array}{l} 0.0791 / Re_D^{0.25} \text{ - по /228/,} \\ 0.007 \cdot [1 + 0.29 \cdot (Re_{film} - 93)] \text{ для } 93 < Re_{film} < 720 \text{ - по /7/,} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.007 \cdot [1 + 0.29 \cdot (Re_{film} - 93)] \text{ для } 93 < Re_{film} < 720 \text{ - по /7/,} \\ L \end{array} \right. \quad (2.36)$$

где R_{nozzle} - радиус сопла.

О взаимодействии капле с пленкой написано достаточно работ (см., например, /140,209,221,229,233,244/ и приведенную в этих работах библиографию). В нашем случае используем описание столкновения капле с пленкой на основе экспериментальных данных. В /140/ коэффициент отражения K_{refr} определяется по формуле, справедливой при малых углах φ столкновения капле и пленки:

$$1 - K_{refr} = B \cdot [1 - 0.884 \cdot Lp^{-0.027} \cdot \exp(-0.188/Lp)] \cdot We^\alpha \cdot D^\beta \cdot \varphi^\gamma , \quad (2.37)$$

где $0.6 < Lp < 5800$; $30 < Re < 3000$; $0.35 < D < 5$; $\varphi < 10^\circ$; $We = Re^2 / Lp$; числа Re и Lp вычисляются по размеру капли и физическим свойствам жидкости, φ - угол столкновения в градусах, $D = D_p / D_{film}$ (D_{film} – толщина пленки), коэффициенты B , α , β и γ приведены в таблице 2.3:

Таблица 2.3.

Значения коэффициентов для расчета отражения капле по формуле (2.37)

Dc		B	α	β	γ
1.2	$D \leq Dc$	0.0726	0.046	0.008	1.453
	$D > Dc$	0.129	-0.027	0.257	1.348
1.4	$D \leq Dc$	0.078	0.045	0.027	1.431
	$D > Dc$	0.115	-0.03	0.341	1.386

В работе А.М.Подвысоцкого и А.И.Баштового /117/ величина $1 - K_{refr}$ определена для больших углов столкновения:

$$1-K_{\text{refr}} = 1-a \cdot \exp(-b \cdot \ln \varphi - \ln c)^2) - \exp(-d \cdot \varphi) \quad (2.38)$$

при $3 < L_p < 1200$; $40 < Re < 1050$; $0.18 < D < 0.53$; $\varphi > 10^\circ$,

где

$$a = 0,305 + 0,00047 \cdot Re - 0,0000001587 \cdot Re^2 ,$$

$$b = 13,251 - 0,0346 \cdot L_p + 0,0000389 \cdot L_p^2 ,$$

$$c = 32,721 + 0,008 \cdot Re - 0,000002307 \cdot Re^2 ,$$

$$d = 0,139 - 0,000381 \cdot L_p + 0,000000324 \cdot L_p^2 .$$

По данным /140/, выбитые из пленки осколки принадлежат двум узким группам ($D_{p_{\text{refr}}}/D_{p_i} = 0.22$ и 0.87), массовые доли которых равны $0.1-0.15$ и $0.85-0.9$ соответственно. Среднее значение модуля начальной скорости осколков

$$W_{p_{\text{refr}}} = \text{Const} \cdot |W_{p_i}|, \quad \text{Const} = (0.8; 0.85) \quad (2.39)$$

а угол между их траекторией и поверхностью

$$\psi = 0.3 \cdot \varphi. \quad (2.40)$$

В расчетах происходит осреднение размера каждой группы в расчетной ячейке, поэтому для простоты средний диаметр осколков

$$D_{p_{\text{refr}}} = 0.807 \cdot D_{p_i} , \quad (2.41)$$

а модуль начальной скорости равен

$$W_{p_{\text{refr}}} = 0.8 \cdot |W_{p_i}|. \quad (2.42)$$

Несколько другая модель, основанная на работах /235,236/, используется в системе FlowVision²⁵. Для капель около стенки определяется число Вебера

$$We = \rho_p \cdot D_p \cdot W_{p_n}^2 / \sigma, \quad (2.43)$$

где W_{p_n} – нормальная составляющая скорости капли к стенке. При $We < 5$ и при $10 < We$ и $S \leq 1$ капля целиком вливается в пленку. При $5 < We \leq 10$ капля целиком отскакивает от пленки. Здесь

$$S = Re / (24 \cdot L_p^{0.419}) , \quad (2.44)$$

числа Re и L_p , также как и ранее, вычисляются по размеру капли и физическим свойствам жидкости.

²⁵ Разрабатывается и распространяется ООО «Тесис».

При $10 < We$ и $S > 1$ происходит разбрызгивание, сопровождающееся возвращением вторичных капель (осколков) из пленки в газ. Доля капель, перешедшая в пленку

$$1 - K_{refr} = S^{-0.6}, \quad (2.45)$$

а средний диаметр выбитых капель $D_{p_{refr}}$ определяется из соотношения

$$\ln(D_{p_{refr}}/D_p) = -2 \cdot D_p / D_r - 0.05 \cdot S, \quad (2.46)$$

где $D_r = 4066$ мкм.

Подход к определению количества и параметров сорванных газом капель также не однозначен. При решении задач теплообмена можно использовать предельную модель /69/, в соответствии с которой расход жидкости в каждом сечении пленки равен критическому расходу, при котором в данных условиях начинается срыв. Эта модель дает заниженное значение расхода жидкости в пленке. Количество унесенной жидкости ΔM_{out} можно определять в процентах от расхода пленки /43,147/ или в зависимости от других параметров пленки /40/. Последнее предпочтительнее, так как при расчете методом установления весьма вероятно появление физически нереализуемых колебаний расхода. В расчетах использовалось соотношение /40/:

$$\Delta M_{out} = (11.16 \cdot \ln W_{g\tau} - 35.045) \cdot (0.0348 \cdot Re_{film} + 5.434) / [(0.0348 \cdot 130 + 5.434) \cdot 1000] \quad (2.47)$$

Диаметр сорванных капель $D_{p_{out}}$ определяется по формулам /80/²⁶:

$$D_{p_{out}} = K_{out} \cdot ((\sigma/\rho_p)^{0.5} / W_{gas\tau})^{1.2} \cdot L^{0.4} \cdot (\rho_p/\rho_g)^{0.2}, \quad (2.48)$$

где K_{out} - опытный коэффициент (подбирается для соответствия данным эксперимента, например, /126,232/), L - максимально возможный масштаб турбулентных пульсаций (диаметр канала).

²⁶ В /40/ указан средний заутеровский диаметр, однако мы полагаем, что все сорванные капли одного размера.

2.5.2. Условия на границе между пленкой и газом внутри сопла

Для некоторого объема V , ограниченного поверхностью S (ячейка расчетной сетки), одна сторона которых соприкасается с пленкой, определяются G_{in} – масса выпавших в пленку (коснувшихся пленки) капель, $K_{refr} \cdot G_{in}$ – отраженная от пленки масса капель (K_{refr} – коэффициент отражения) и ΔM_{out} – масса сорванных газом капель с гребней поверхностных волн. С этими величинами связан соответствующий импульс: $G_{in} \cdot K_{refr} \cdot W_{p\ ref}$ – импульс отскочивших (выбитых) капель, где $W_{p\ ref}$ – скорость этих капель (см. п.2.5.1, формулы (2.37,2.38,2.42,2.44,2.45)), $\Delta M_{out} \cdot W_{film}$ – импульс сорванных капель (W_{film} – скорость пленки), здесь предполагается, что сорванные газом капли имеют скорость пленки. Средняя температура капель вычисляется из соотношения (2.12) (см. п.2.1.):

$$\begin{aligned} \partial[\int (\alpha_{p\ i} \cdot \rho_p \cdot C_{part} \cdot T_{p\ i} \cdot dv)_v] / \partial t = \\ = - \int (\alpha_{p\ i} \cdot \rho_p \cdot C_{part} \cdot T_{p\ i} \cdot (\mathbf{W}_{p\ i} \cdot \mathbf{n}) \cdot ds)_S + \int (\alpha_{p\ i} \cdot \rho_p \cdot Q_{p\ i} + \Delta Q_i \cdot dv)_v, \quad i=1, \dots, N, \end{aligned}$$

где перенос энергии через соприкасающуюся с пленкой сторону поверхности S (расчетной ячейки) равен

$$(K_{refr\ i} - 1) \cdot G_{in\ i} \cdot C_{part} \cdot T_{p\ i} + \Delta M_{out} \cdot C_{part} \cdot T_{film},$$

и T_{film} – температура пленки (здесь предполагается, что сорванные газом капли имеют температуру пленки).

Из-за трения закон сохранения импульса и закон сохранения энергии газа для соприкасающегося с пленкой объема V будут выглядеть следующим образом:

закон сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \partial[\int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot \mathbf{W}_g \cdot dv)_v] / \partial t = - \int (\mathbf{P}_g \cdot \mathbf{n} \cdot ds)_S - \int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{W}_g \cdot ds)_S - \\ - \sum \{ \int (\alpha_{p\ i} \cdot \rho_p \cdot [\mathbf{F}_{соп\ i} + \mathbf{F}_{A\ i}] \cdot dv)_v \}_{i=1, \dots, N} - \mathbf{F}_{film} \cdot \mathbf{S}_{12}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где \mathbf{S}_{12} – площадь поверхности пленки на участке 1-2;

закон сохранения энергии:

$$\partial[\int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot E_g \cdot dv)_v] / \partial t =$$

$$= - \int (P_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) \cdot ds)_S - \int (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot (\mathbf{W}_g \cdot \mathbf{n}) \cdot E_g \cdot ds)_S - \sum \left\{ \int (\alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot Q_{p_i} + \alpha_{p_i} \cdot \rho_p \cdot [F_{\text{comp } i} + F_{A_i}] \cdot \mathbf{W}_{p_i} \cdot dV \right\}_{i=1, \dots, N} - |F_{\text{film}}| \cdot |\mathbf{W}_\tau - \mathbf{W}_{\text{film}}| \cdot S_{12}, \quad (2.50)$$

где F_{film} – сила трения между газом и пленкой (см. п.2.5.1), \mathbf{W}_τ – составляющая скорости газа, параллельная поверхности пленки.

Важно подчеркнуть, что здесь мы уже имеем дело не с монодисперсным потоком, так как в результате взаимодействия газа и капель с пленкой образуются капли размера, отличного от заданного на входе в канал, поэтому меняется средний диаметр капель в пристеночном элементарном объеме и, следовательно, во всем потоке.

Так как группа капель в элементарном объеме характеризуется одним диаметром, то он вычисляется как средний по новому числу капель n_{new} из соотношения:

$$M_{\text{new}} = n_{\text{new}} \cdot \rho_p \cdot \pi \cdot D_{\text{средний}}^3 / 6, \quad (2.51)$$

где M_{new} – масса капель в ячейке после временного шага Δt .

Новое число капель в группе определяется с учетом того, что с пленкой сталкиваются капли старого диаметра, а отражаются – нового (см. (2.41, 2.46) п.2.5.1), также своим диаметром характеризуются сорванные газом с поверхности пленки капли. Число отраженных от пленки капель:

$$\Delta n_{\text{refr}} = K_{\text{refr}} \cdot G_{\text{in}} \cdot \Delta t / (\rho_p \cdot \pi \cdot D_{\text{refr}}^3 / 6), \quad (2.52)$$

где D_{refr} – средний диаметр отраженных капель,

число сорванных капель:

$$\Delta n_{\text{out}} = \Delta M_{\text{out}} \cdot \Delta t / (\rho_p \cdot \pi \cdot D_{\text{out}}^3 / 6), \quad (2.53)$$

где D_{out} – средний диаметр сорванных капель (см. (2.48) п.2.5.1).

Таким образом,

$$n_{\text{new}} = n_{\text{old}} + \Delta n_{\text{refr}} + \Delta n_{\text{out}}, \quad (2.54)$$

где n_{old} вычисляется так же, как и для внутреннего элементарного объема (без учета пленки); n_{old} есть количество капель в элементарном объеме после интервала времени Δt , образовавшееся за счет перетекания капель через границы с соседними объемами). Число пересекших границу объема

(поверхность S) капля определяется с учетом направления потока, то есть в качестве диаметра берется диаметр капля в объеме, откуда вытекает поток:

$$\Delta n_{old j} = \Delta M_j \cdot \Delta t / (\rho_p \cdot \pi \cdot D_p^3 / 6), \quad (2.55)$$

где j просто номер элемента поверхности, если их пронумеровать каким-либо образом, а ΔM_j – поток капля через элемент j за единицу времени.

В зоне вытекания пленки полагается, что она мгновенно дробится на капли известного диаметра, который может определяться в соответствии с толщиной пленки у среза сопла и задаваться константой. Такой поток капля втекает извне в рассматриваемую область со скоростью пленки.

2.6. Модель столкновения капля

Экспериментально процессы столкновения капля исследовались достаточно широко (см. обзор в /140/). Если коротко, то основные результаты этих исследований сводятся к тому, что при столкновении капли или сливаются, или отскакивают друг от друга, или образуется несколько капля новых диаметров, при этом капли теряют сферическую форму. Численно, в хорошем соответствии с экспериментом, эти процессы исследованы в /231/ (рис.2.3, 2.4).

Так как для моделирования потока используется модель взаимопроникающих сред, то предполагается использовать соответствующие экспериментальные зависимости.

В работе /21/ обращалось внимание на то, что в процессе столкновений из-за нецентральных ударов возрастает скорость вращения капля, поэтому движение капля определяется не только силой аэродинамического сопротивления, но и силой Магнуса, связанной с вращением. Однако, в первом приближении, *учетом вращения пренебрегаем*²⁷.

²⁷ В основном это касается силы Магнуса, так как, в силу особенностей постановки экспериментов /140/, при определении коэффициента эффективности соударений F_{ij} (см. п.2.6.5) нецентральные удары и начальное вращение капля осреднено эмпирическими зависимостями.

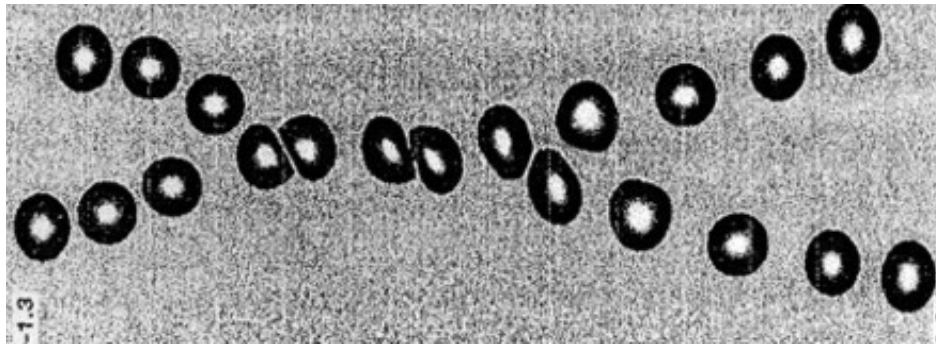


Рис.2.3. Столкновения с отскоком капель. Здесь параметр взаимодействия $I=0.75$ ($I=y/Dp$, y – расстояние между направлениями движения капель в начальный момент взаимодействия) и капли не могут слиться. Начальные условия показаны вверху рисунка, и далее видны положения капель через временной промежуток в 0.42 относительных единиц.

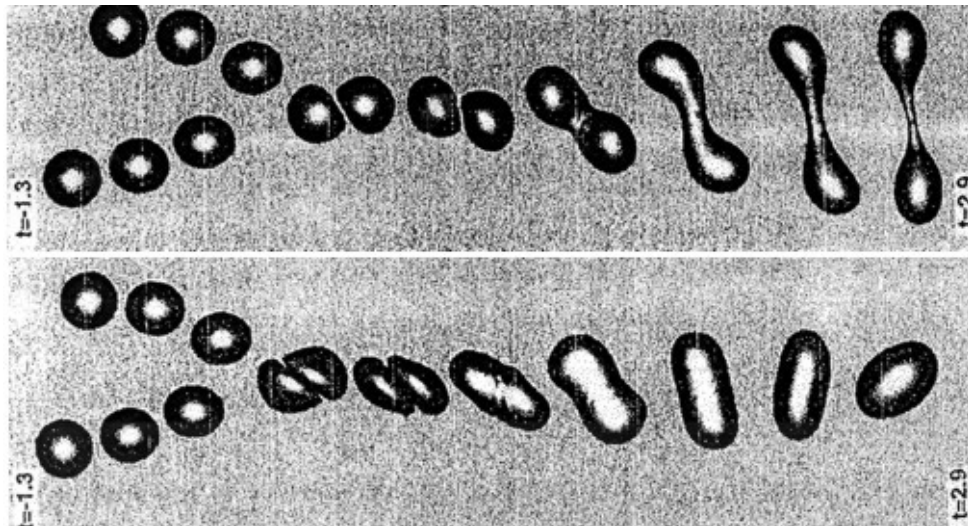


Рис.2.4. Столкновения со слиянием капель. Начальные условия показаны вверху рисунка, и далее видны положения пар капель через временной промежуток в 0.42 относительных единиц. Пленка разрушается при $t=0.46$ в обоих случаях. При малом значении параметра взаимодействия $I=0.5$ ($I=y/Dp$, y – расстояние между направлениями движения капель в начальный момент взаимодействия) капли после столкновения сливаются и далее двигаются как единое целое (верхняя часть рисунка). При большем значении параметра взаимодействия $I=0.825$ (нижняя часть рисунка) капли после столкновения сливаются, но затем они снова отделяются друг от друга.

Все капли разбиваются на группы (фракции) с номерами $i=1, \dots, N$, отличающиеся скоростью и диаметром²⁸. В рамках представления дискретной фазы как сплошной среды рассматривается не взаимодействие отдельных капель, а изменение характеристик взаимодействующих в течение некоторого интервала времени групп. При таком подходе удобно использовать экспериментальные зависимости, дающие некоторые средние характеристики множества похожих столкновений.

Рассматриваем только парные столкновения в некотором объеме газокапельного потока, когда друг с другом сталкиваются только две капли, процессы внутри капли не рассматриваются²⁹. Более крупную каплю условимся называть *мишенью*, мелкую – *снарядом*.

Процесс столкновения можно представить следующим образом. За некоторый интервал времени при относительно малой скорости сближения часть снарядов полностью сливается с мишенями, а часть испытывает касательные столкновения, при которых снаряд теряет часть импульса. При относительно высокой скорости часть снарядов испытывает касательные столкновения с потерей импульса, а часть – выбивает из мишени несколько осколков и отскакивает сама. Осколки как бы отваливаются от мишени, которая за счет удара ускоряется. Отскочивший снаряд может при этом потерять часть импульса. В данной схеме столкновений не учитываются во всей полноте экспериментальные данные о дисперсном составе осколков, но, как будет показано ниже, при расчете эти данные и не могут достойно использоваться. С другой стороны, здесь нет неопределенности с импульсом снарядов, осколков и мишени. Фактически реализована так называемая «гипотеза 1» /140/ о перераспределении импульса и энергии нового вещества

²⁸ Разбиение проводится по диаметру на некоторый начальный момент, в процессе расчета скорость и диаметр капель каждой группы меняются во времени и пространстве.

²⁹ В работе /135/ рассматриваются колебания капли, образованной в результате слияния двух других. Показано, что в ряде случаев необходимо учитывать время «успокоения» капли, так как в это время она довольно сильно отличается от сферы. В нашем случае, с одной стороны, размер полученных капель осреднялся методикой обработки экспериментальных данных /140/, с другой – изменение коэффициента сопротивления также учитывается осредняющими экспериментальными зависимостями.

в группе – он равномерно распределяется по всем каплям. Эту гипотезу необязательно связывать с реальным механизмом выравнивания параметров капель, а можно рассматривать как осреднение скорости и температуры внутри группы.

Существуют модели столкновений, похожие на предлагаемую автором (см., например, /55,130,140,208/). Не претендуя на оригинальность, отметим, что в данной модели:

- в схеме столкновений проведено деление осколков на осколки-снаряды (это капли, столкнувшиеся с более крупной каплей, но не изменившие своей массы) и осколки от мишени (это капли, образованные из вещества крупной капли, испытавшей столкновение);
- учтена система координат при использовании экспериментального коэффициента потери импульса β ;
- в схеме расчета подробно описана ситуация полного развала крупной капли в результате столкновения с более мелкой каплей-снарядом.

В некотором объеме каждая группа i имеет характерные диаметр D_{p_i} , скорость W_{p_i} , объемную концентрацию α_{p_i} , температуру T_{p_i} ³⁰. Для группы i возможно столкновение с более мелкими и с более крупными каплями из других групп. Столкновение с каплями такого же диаметра отнесем к случаю столкновения с более мелкими каплями. Рассмотрим эти процессы с использованием того же подхода и обозначений, что и в работе /55/. Для удобства будем использовать две системы координат: связанную со скоростью мишени до столкновения и абсолютную, связанную с соплом. Дополнительно введен коэффициент β уменьшения скорости отскочивших снарядов в системе координат мишени.

За время dt столкновение капель группы i с каплями группы f может произойти, если центр капли D_{p_f} будет находиться в цилиндре с площадью основания $\pi(D_{p_i}+D_{p_f})/4$ и длиной образующей $|W_{p_i}-W_{p_f}|dt$. Вероятность

³⁰ Характерные величины вводятся по массе, импульсу и энергии как средние арифметические с учетом числа капель в объеме.

столкновения каплей учитывается введением коэффициента захвата $e_{if} < 1$ (вычисление см. п.2.6.5). Одна капля D_{p_i} с учетом коэффициента захвата e_{if} испытывает

$$\pi(D_{p_i} + D_{p_f})^2 \cdot |W_{p_i} - W_{p_f}| \cdot e_{if} \cdot n_f \cdot dt / 4 \quad (2.56)$$

соударений с каплями D_{p_f} . Здесь n_f – число капель группы f в единице объема. Произведение

$$K_{if} = \pi(D_{p_i} + D_{p_f})^2 \cdot |W_{p_i} - W_{p_f}| / 4 \quad (2.57)$$

называется константой коагуляции. В единицу времени одна капля диаметром D_{p_i} испытывает

$$K_{if} \cdot e_{if} \cdot n_f$$

столкновений с каплями D_{p_f} . Исход столкновений, которые могут закончиться либо слиянием (коагуляцией) взаимодействующих капель, либо дроблением крупной капли, описывается коэффициентом эффективности соударений, представляющим собой математическое ожидание отношения изменения объема крупной капли (мишени) группы i к суммарному объему столкнувшихся с ней в течение некоторого времени мелких капель (снарядов) j :

$$F_{ij} = \Delta V_i / (\Sigma V)_j \quad (2.58)$$

При полном слиянии $F_{ij} = 1$, при дроблении $F_{ij} < 1$, если в осколки переходит часть вещества мишени $F_{ij} < 0$. О способе определения этой величины будет сказано ниже (см. п.2.6.5).

Так как капли некоторой группы i в зависимости от диаметра капель других групп могут играть как роль мишеней (при столкновении с более мелкими каплями), так и роль снарядов (при столкновении с более крупными каплями), рассмотрим эти ситуации отдельно, на единичном временном интервале.

2.6.1. Столкновение с мелкими каплями

Здесь меняется масса капель данной группы i (мишеней), осколки переходят в группу, соответствующую снаряду f . Число капель-мишеней не меняется. В результате слияния одной капли с частью капель группы f , столкнувшихся с ней, ее масса в единицу времени возрастет на величину

$$K_{if} \cdot e_{if} \cdot n_f \cdot V_f \cdot F_{if} \cdot \rho_p, \quad (2.59)$$

где ρ_p – плотность вещества капель, V_f - объем одного снаряда.

Изменение массы капель группы i в единице объема среды в единицу времени при их слиянии со всеми более мелкими каплями D_{pf} равно

$$n_i \cdot \Sigma(K_{if} \cdot e_{if} \cdot n_f \cdot V_f \cdot F_{if} \cdot \rho_p)_{D_{pf} < D_{pi}}, \quad (2.60)$$

где запись $\Sigma(\dots)_x$ означает суммирование при выполнении условия x .

С учетом того, что $V_f = \pi D_{pf}^3 / 6$ и $n_i = \alpha_{pi} / V_i$, новая масса мишеней

$$M_{new\ i} = M_{old\ i} + \Delta M_{small\ i}, \quad (2.61)$$

где

$$\Delta M_{small\ i} = [6 \cdot \alpha_{pi} / (\pi D_{pi}^3)] \cdot \Sigma(K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p)_{D_{pf} < D_{pi}}, \quad (2.62)$$

и суммирование идет по всем группам в данной области пространства, для которых характерный диаметр D_{pf} меньше диаметра мишени D_{pi} , а $M_{old\ i}$ – масса мишеней до столкновения.

Изменение импульса для удобства рассмотрим в системе координат, движущейся со скоростью мишени i до столкновения. Выделим случаи $F_{if} > 0$ и $F_{if} < 0$. Подчеркнем ещё раз, что в записи F_{if} индекс i относится к снаряду, а f – к мишени.

2.6.1.1. Изменение скорости капель группы i при $F_{if} > 0$

Эта ситуация соответствует малой скорости сближения капель. Импульс A «прилипшей» к мишени части снарядов есть

$$A = [6 \cdot \alpha_{pi} / (\pi D_{pi}^3)] \cdot \Sigma(K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p \cdot W_{pfi})_{D_{pf} < D_{pi}, F_{if} > 0}, \quad (2.63)$$

где $W_{pfi} = W_{pf} - W_{pi}$ – относительная скорость капель.

Импульс B отскочившей части снарядов (осколков) есть

$$B=[6 \cdot \alpha_{pi}/(\pi Dp_i^3)] \cdot \Sigma(K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1-F_{if}) \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p \cdot Wp_{fi} \cdot \beta_i)_{Dpf < Dpi, F_{if} > 0} , \quad (2.64)$$

где β_i - коэффициент уменьшения скорости осколков. Перпендикулярную Wp_{fi} компоненту скорости осколков пока не рассматриваем. Так как импульс C перешедших в осколки снарядов до столкновения был равен

$$C=[6 \cdot \alpha_{pi}/(\pi Dp_i^3)] \cdot \Sigma(K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1-F_{if}) \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p \cdot Wp_{fi})_{Dpf < Dpi, F_{if} > 0} , \quad (2.65)$$

то изменение импульса мишеней

$$\begin{aligned} \Delta I_i &= A+C-B = \\ &= [6 \cdot \alpha_{pi}/(\pi Dp_i^3)] \cdot \Sigma \{K_{if} \cdot e_{if} \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p \cdot Wp_{fi} \cdot [F_{if} + (1-F_{if}) \cdot (1-\beta_i)]\}_{Dpf < Dpi, F_{if} > 0} . \end{aligned} \quad (2.66)$$

В результате столкновения мишень начинает двигаться, то есть при новой массе $M_{new i}$ она приобретает скорость W : $M_{new i} \cdot W = \Delta I_i$. В абсолютной системе координат новая скорость мишени ($Wp_{i new}$) связана со старой ($Wp_{i old}$) следующим образом:

$$Wp_{i new} = Wp_{i old} + \Delta I_i / M_{new i} , \quad (2.67)$$

при этом $M_{new i} > M_{old i}$.

2.6.1.2. Изменение скорости капель группы i при $F_{if} < 0$

Эта ситуация соответствует относительно высокой скорости сближения капель. При столкновении в осколки переходит часть вещества мишени i , поэтому необходимо предположение о скорости осколков. Предположим, что все осколки переходят в группу снарядов f , при этом отскочившие снаряды теряют часть импульса (в соответствии с коэффициентом β), а выбитые осколки имеют скорость мишени до столкновения, то есть неподвижны в принятой системе координат. В этой же системе координат мишень начинает двигаться. При этом в осколки не может перейти масса большая, чем масса мишень+снаряд, то есть для F_{if} есть ограничение

$$F_{if} > -(Dp_i^3 + Dp_f^3) / Dp_f^3 . \quad (2.68)$$

Тогда

$$\Delta I_i = [6 \cdot \alpha_{pi}/(\pi Dp_i^3)] \cdot \Sigma \{K_{if} \cdot e_{if} \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p \cdot Wp_{fi} \cdot (1-\beta_i)\}_{Dpf < Dpi, F_{if} < 0} \quad (2.69)$$

Фактически ΔI_i – изменение импульса снарядов, так как осколки, в принятой системе координат, не влияют на изменение импульса.

$$W_{p_{i \text{ new}}} = W_{p_{i \text{ old}}} + \Delta I_i / M_{\text{new } i},$$

при этом $M_{\text{new } i} < M_{\text{old } i}$.

Возможны случаи, когда мишень развалится, то есть $M_{\text{new } i} = 0$. Для исключения таких ситуаций в процессе вычислений вводится искусственное ограничение для F_{if} в виде³¹

$$F_{if} > -K(Dp_i^3 + Dp_f^3) / Dp_f^3, \quad 0 < K < 1. \quad (2.70)$$

Фактически это означает, что часть осколков (один осколок) остается в данной группе i . Моменты возникновения этой ситуации (проблемные области течения) контролируются.

2.6.2. Столкновение с крупными каплями

В этом случае данная группа i играет роль снарядов, то есть число капель изменяется пропорционально ушедшей или пришедшей массе. Аналогично предыдущему новая масса капель

$$M_{\text{new } i} = M_{\text{old } i} + \Delta M_{\text{large } i}, \quad (2.71)$$

где

$$\Delta M_{\text{large } i} = -\alpha_{pi} \cdot \sum \{K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi Dp_f^3)] \cdot \rho_p\}_{Dpf > Dpi}, \quad (2.72)$$

знак “-” стоит для учета знака коэффициента эффективности соударений F_{if} . Отмечу, что с определенной группой мишеней f сталкиваются не все снаряды i , а их часть δ_{fi} (см. п.2.6.2.1).

Изменение импульса, также как и ранее, рассмотрим в системе координат, движущейся со скоростью мишени до столкновения. Снова выделим случаи $F_{if} > 0$ и $F_{if} < 0$.

2.6.2.1. Изменение скорости капель группы i при $F_{if} > 0$

³¹ Это одна из особенностей представленной модели.

В этой ситуации ушедший к крупным каплям вместе с массой импульс не меняет скорость снарядов \mathbf{i} . Импульс отскачивших снарядов V_f есть

$$V_f = \alpha_{pi} \cdot K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1 - F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{pif} \cdot \beta_1, \quad (2.73)$$

где $W_{pif} = W_{pi} - W_{pf}$ – относительная скорость капель, при этом, до столкновения, эти снаряды имели импульс

$$C_f = \alpha_{pi} \cdot K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1 - F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{pif}. \quad (2.74)$$

Изменение импульса ΔI_{fi} касается той части снарядов δ_{fi} , которая столкнулась с мишенями \mathbf{f} :

$$\Delta I_{fi} = V_f - C_f = \alpha_{pi} \cdot K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1 - F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{pif} (\beta_1 - 1). \quad (2.75)$$

В абсолютной системе координат скорость после столкновения с мишенями \mathbf{f} есть

$$W_{pf \text{ new}} = W_{pi \text{ old}} + \Delta I_{fi} / (M_{old i} \cdot \delta_{fi} - \Delta M_{fi}), \quad (2.76)$$

где $W_{pi \text{ old}}$, $W_{pf \text{ new}}$ – соответственно скорости снарядов до и после столкновения, $M_{old i}$ – масса снарядов до столкновения,

$\Delta M_{fi} = \alpha_{pi} \cdot K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p$ – масса прилипшей к мишеням части снарядов. Здесь предполагается, что все снаряды группы \mathbf{i} делятся пропорционально δ_{fi} , и каждая порция взаимодействует с соответствующей группой мишеней \mathbf{f} . Величина δ_{fi} – отношение числа столкновений в единицу времени с мишенями группы \mathbf{f} к общему числу столкновений с мишенями:

$$\delta_{fi} = K_{if} \cdot e_{if} \cdot n_f \cdot n_i / \{n_i \sum (K_{if} \cdot e_{if} \cdot n_f)_{D_{pf} > D_{pi}, F_{if} > 0}\}. \quad (2.77)$$

В абсолютной системе координат общий импульс группы \mathbf{i} после столкновений

$$\begin{aligned} (M_{old i} + \Delta M) \cdot W_{pi \text{ new}} &= \{ \sum (M_{old i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi}) \cdot W_{pf \text{ new}} \}_{D_{pf} > D_{pi}} = \\ &= \{ \sum M_{old i} \cdot \delta_{fi} [W_{pi \text{ old}} + \Delta I_{fi} / (M_{old i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi})] \}_{D_{pf} > D_{pi}} + \\ &+ \{ \sum \Delta M_{fi} [W_{pi \text{ old}} + \Delta I_{fi} / (M_{old i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi})] \}_{D_{pf} > D_{pi}} = \\ &= \{ \sum M_{old i} \cdot \delta_{fi} \cdot W_{pi \text{ old}} \}_{D_{pf} > D_{pi}} + \\ &+ \{ \sum M_{old i} \cdot \delta_{fi} \cdot \Delta I_{fi} / (M_{old i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi}) \}_{D_{pf} > D_{pi}} + \\ &+ \{ \sum \Delta M_{fi} \cdot W_{pi \text{ old}} \}_{D_{pf} > D_{pi}} + \\ &+ \{ \sum \Delta M_{fi} \cdot \Delta I_{fi} / (M_{old i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi}) \}_{D_{pf} > D_{pi}} = \\ &= W_{pi \text{ old}} \cdot \{ \sum (M_{old i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi}) \}_{D_{pf} > D_{pi}} + \end{aligned}$$

$$+ \{ \Sigma (M_{old\ i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi}) \cdot \Delta I_{fi} / (M_{old\ i} \cdot \delta_{fi} + \Delta M_{fi}) \}_{D_{pf} > D_{pi}}$$

$$= (M_{old\ i} + \Delta M) \cdot W_{p_{i\ old}} + \Sigma (\Delta I_{fi})_{D_{pf} > D_{pi}},$$

где $\Delta M = \Sigma (\Delta M_{fi})_{D_{pf} > D_{pi}}$, а средняя скорость после столкновений

$$W_{p_{i\ new}} = W_{p_{i\ old}} + \Sigma (\Delta I_{fi})_{D_{pf} > D_{pi}, F_{if} > 0} / M_{new}. \quad (2.78)$$

2.6.2.2. Изменение скорости капель группы i при $F_{if} < 0$

В этом случае в системе координат снаряда (капель данной группы i) отскочившие снаряды приобретают некоторую скорость

$$W_{out\ f} = (W_{p_i} - W_{p_f}) \cdot \beta_f - (W_{p_i} - W_{p_f}), \quad (2.79)$$

где $(W_{p_i} - W_{p_f}) \cdot \beta_f$ – скорость отскочивших снарядов в системе координат мишени, $(W_{p_i} - W_{p_f})$ – скорость движения системы координат снаряда относительно системы координат мишени, поэтому изменение импульса A отскочивших снарядов

$$A = \alpha_{pi} \cdot \Sigma \{ K_{if} \cdot e_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{if}} \cdot (\beta_f - 1) \}_{D_{pf} > D_{pi}, F_{if} < 0}. \quad (2.80)$$

Импульс B перешедших в рассматриваемую группу i осколков от мишеней (полагаем, что осколки имеют скорость мишеней)

$$B = \alpha_{pi} \cdot \Sigma \{ K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{if}} \}_{D_{pf} > D_{pi}, F_{if} < 0}. \quad (2.81)$$

Общее изменение импульса

$$\Delta I = A + B = \alpha_{pi} \cdot \Sigma \{ K_{if} \cdot e_{if} \cdot \rho_p \cdot W_{p_{if}} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot [(\beta_f - 1) + F_{if}] \}_{D_{pf} > D_{pi}, F_{if} < 0}, \quad (2.82)$$

соответственно скорость капель после столкновения

$$W_{p_{i\ new}} = W_{p_{i\ old}} + \Delta I / M_{new\ i}. \quad (2.83)$$

Здесь и выше не используется диаметр осколков, так как число столкновений определяется по диаметрам капель до столкновений.

2.6.3. Изменение массы, температуры и импульса группы капель в результате столкновений

В результате столкновений с мелкими и крупными каплями итоговая масса капель группы i будет

$$M_{\text{new } i} = M_{\text{old } i} + \Delta M_{\text{small } i} + \Delta M_{\text{large } i} , \quad (2.84)$$

значит, новая температура капель группы $T_{p_{\text{new } i}}$ находится из уравнения

$$C_{\text{part}} \cdot T_{p_{\text{new } i}} \cdot M_{\text{new } i} = C_{\text{part}} \cdot T_{p_{\text{old } i}} \cdot M_{\text{old } i} + \Delta Q_i$$

$$\Delta Q_i = [6 \cdot \alpha_{pi} / (\pi D_{pi}^3)] \cdot \Sigma (K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot \alpha_{pf} \cdot C_{\text{part}} \cdot T_{p_{\text{old } f}} \cdot \rho_p)_{D_{pf} < D_{pi}} -$$

$$- \alpha_{pi} \cdot \Sigma \{ K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot C_{\text{part}} \cdot T_{p_{\text{old } f}} \cdot \rho_p \}_{D_{pf} > D_{pi}} . \quad (2.85)$$

Фактически здесь мы пренебрегаем обменом массой через жидкую перемижку между каплями при отскоке, а также влиянием изменения энергии поверхностного натяжения на температуру капель³².

Скорость капель определяется из соотношения

$$W_{p_{\text{new } i}} = W_{p_{\text{old } i}} + (\Delta I_i + \Sigma (\Delta I_{fi})_{D_{pf} > D_{pi}, F_{if} > 0} + \Delta I_{F_{if} < 0}) / M_{\text{new } i} . \quad (2.86)$$

2.6.4. Изменение диаметра в результате столкновений

После некоторого интервала времени в результате столкновений с каплями других групп в рассматриваемой группе i будут находиться капли разных диаметров. Это будут увеличенные в результате слияния капли данной группы и пришедшие осколки.

Так как группа характеризуется одним диаметром, то он вычисляется как средний по новому числу капель из соотношения:

$$M_{\text{new } i} = n_{\text{new } i} \cdot \rho_p \cdot \pi \cdot D_{pi_{\text{средний}}}^3 / 6 . \quad (2.87)$$

Новое число капель в группе $n_{\text{new } i}$ определяется с учетом того, что при столкновениях с мелкими каплями число капель группы не меняется, а при столкновении с более крупными каплями,

в случае $F_{if} > 0$, число прилипших снарядов есть

$$\Delta n_i^- = -\Delta M_{\text{large } i} / [\rho_p \cdot \pi \cdot D_{pi}^3 / 6] , \quad (2.88)$$

³² Пусть $D_p = 100$ мкм, тогда поверхностная энергия одной капли

$$E_{\text{поверхность}} = \sigma \cdot S_{\text{поверхность}} = \sigma \cdot \pi \cdot D_p^2 = 0.075 \cdot \pi \cdot 10^{-8} = 0.24 \cdot 10^{-8} \text{ Дж},$$

изменение энтальпии капли при изменении температуры на один градус ($\Delta T = 1$ К) составит

$$C_{\text{part}} \cdot \Delta T \cdot \rho_p \cdot \pi \cdot D_p^3 / 6 = 4,186 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 \cdot \pi / 6 = 0,22 \cdot 10^{-5} \text{ Дж},$$

то есть максимальное влияние поверхностной энергии порядка 10^{-3} градуса и им можно пренебречь.

где, с учетом знака, $\Delta M_{\text{large } i}$ – масса прилипших (ушедших из данной группы **i**) снарядов,

а в случае $F_{if} < 0$ число пришедших осколков есть

$$\Delta n_i^+ = \alpha_{pi} \cdot \Sigma \{ K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi \cdot D_{pf}^3)] \cdot [6 / (\rho_p \cdot \pi \cdot D_{pf} \cdot D_{\text{осколок}}^3)] \cdot \rho_p \} \cdot D_{pf} > D_{pi}. \quad (2.89)$$

В качестве диаметра осколков надо брать средний по массе, используя какие-либо экспериментальные данные (см., например, ссылки в работе /40/)³³.

Таким образом,

$$n_{\text{new } i} = n_{\text{old } i} - \Delta n_i^- + \Delta n_i^+, \quad (2.90)$$

где $n_{\text{old } i} = M_{\text{old } i} / [\rho_p \cdot 6 / (\pi D_{pi}^3)]$.

2.6.5. Вычисление коэффициентов захвата e_{if} , эффективности соударений F_{if} и коэффициента уменьшения скорости отскочивших снарядов β_f

Коэффициенты e_{if} и F_{if} , входящие в выражения для расчета параметров капель при их слиянии и дроблении, рассчитываются по эмпирическим формулам. Индекс f относится к крупной капле, а индекс i - к мелкой, т.е. $D_{pf} > D_{pi}$.

Для расчета коэффициента захвата e_{if} можно использовать формулы, полученные Лэнгмюром и приведенные в /21,140/:

- для режима вязкого обтекания капли газом ($Re_f \leq 30$),

при относительном числе Стокса

$$Stk_{if} > 0.607 \quad e_{if}^{(B)} = (1 + 0.75 \cdot \ln(4 \cdot Stk_{if}) / (2 \cdot Stk_{if} - 1.214))^{-2}; \quad (2.91)$$

при $Stk_{if} \leq 0.607 \quad e_{if}^{(B)} = 0$.

Числа Рейнольдса Re_f и Стокса Stk_{if} определяются по формулам

$$Re_f = \rho_g \cdot D_{pf} \cdot |W_{pi} - W_{pf}| / \mu_g; \quad (2.92)$$

$$Stk_{if} = \rho_p \cdot D_{pi}^2 \cdot |W_{pi} - W_{pf}| / (18 \mu_p \cdot D_{pf}); \quad (2.93)$$

- для потенциального обтекания капли ($Re_f \rightarrow \infty$),

$$\text{при } Stk_{if} > 0.0417 \quad e_{if}^{(n)} = (Stk_{if} / (Stk_{if} + 0.25))^2; \quad (2.94)$$

³³ В расчетах использовалась формула $D_{pf \text{ осколок}} = K_{\text{осколок } f} \cdot D_{pi}$, $K_{\text{осколок } f}$, чаще всего, полагалось равным 1.

при $Stk_{if} \leq 0.0417$ $e_{if}^{(n)} = 0$.

Для промежуточной гидродинамической области предлагается формула /151/

$$e_{if} = (60 \cdot e_{if}^{(B)} + Re_f \cdot e_{if}^{(n)}) / (Re_f + 60). \quad (2.95)$$

Если снаряды не очень малы, следует учесть поправку Δe_{if} к коэффициенту захвата, которая учитывает так называемый эффект зацепления (приведена в книге /140/ по данным Дж.Корбетта):

$$\begin{aligned} - \text{при } Re_f \rightarrow 0 \quad \Delta e_{if} &= 1.5(Dp_i/Dp_f)^2; \\ - \text{при } Re_f \rightarrow \infty \quad \Delta e_{if} &= 3 \cdot (Dp_i/Dp_f). \end{aligned} \quad (2.96)$$

При необходимости проведения расчетов с повышенной точностью для определения e_{if} в промежуточной гидродинамической области можно воспользоваться данными работы /128/.

Коэффициент эффективности соударений F_{if} может быть рассчитан по одной из формул

$$\text{а) } F_{if} = 1 - 0.246 \cdot Re_{if}^{0.407} \cdot Lp_f^{-0.096} \cdot \gamma_{if}^{-0.278} \quad 30 < Re_{if} < 6000; \quad 5 < Lp_f < 3 \cdot 10^5; \quad 1,9 < \gamma_{if} < 12 \quad (2.97)$$

$$\text{б) } F_{if} = 1.4 - 1.979 \cdot \lambda + 0.507 \cdot (2 \cdot \lambda^2 - 1) \quad 6 < Re_{if} < 385; \quad 0,2 < Lp_f < 600; \quad 1 < \gamma_{if} < 12 \quad (2.98)$$

$$\text{где } \lambda = (Re_{if}/383.6)^{0.572} (Lp_f/370.37)^{-0.153} (\gamma_{if}/2.37)^{-0.597}; \quad \lambda < 1, \quad (2.99)$$

$$\text{а) } \gamma_{if} = Dp_f/Dp_i; \quad (2.100)$$

$$Re_{if} = \rho_p \cdot Dp_f \cdot |Wp_i - Wp_f| / \mu_p; \quad (2.101)$$

$$Lp_f = \rho_p \cdot Dp_f \cdot \sigma / \mu_p^2 - \text{число Лапласа.} \quad (2.102)$$

По рекомендации работы /140/ формула (2.98) используется в случае выхода λ , Re_{if} или Lp_f из диапазона допустимых значений формулы (2.97)³⁴.

Коэффициент β_f уменьшения скорости отскочивших снарядов определяется как в /140/:

$$\beta_f = 0.08 + 0.016 \cdot We_f \quad \text{при } We_f \leq 12.5, \quad (2.103)$$

³⁴ Например, для воды и воздуха при разнице скорости капель 20 м/с, диаметре 40 – 400 мкм $\gamma_{if} \sim 10$, $Re_f \sim 10^4$, $Lp_f \sim 10^3$.

в противном случае $\beta_f = 1$. Здесь $We_f = \rho_{\text{gas}} \cdot D_{pf} \cdot |W_{\text{gas}} - W_{pf}|^2 / \sigma$, f – индекс более крупной капли (мишени), σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

2.6.6. Доказательство выполнения законов сохранения массы, импульса и энергии в модели столкновений

Покажем, что в предлагаемой модели столкновений общая масса капель сохраняется:

$$\text{так как } \Delta M_{\text{small } i} = [6 \cdot \alpha_{pi} / (\pi D_{pi}^3)] \cdot \Sigma (K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot \alpha_{pf} \cdot \rho_p)_{D_{pf} < D_{pi}} \quad (\text{а}),$$

$$\Delta M_{\text{large } i} = -\alpha_{pi} \cdot \Sigma \{ K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pf} / (\pi D_{pf}^3)] \cdot \rho_p \}_{D_{pf} > D_{pi}} \quad (\text{б}),$$

где $i=1, \dots, N$, $\Delta M_{\text{small } 1} = 0$ и $\Delta M_{\text{large } N} = 0$, то видно, что слагаемые групп (а) и (б) имеют одинаковую структуру. Пронумеруем группы в порядке возрастания диаметров капель, тогда

$\Delta M_{\text{small } i}$ соответствует суммирование вида $\Sigma (\Sigma_{f=1, \dots, k-1})_{k=2, \dots, N}$,

а

$\Delta M_{\text{large } i}$ соответствует суммирование вида $\Sigma (\Sigma_{j=i+1, \dots, N})_{i=1, \dots, N-1}$,

и число слагаемых для обеих групп равно $N(N-1)/2$. Правила суммирования можно представить в виде таблицы 2.4. Непосредственно из таблицы видно, что в группах (а) и (б) имеем набор пар одинаковых по структуре слагаемых с одинаковыми индексами, но разных знаков, то есть их сумма равна нулю.

Из сохранения общей массы капель в рассмотренной модели столкновений непосредственно следует сохранение их общей тепловой энергии. Повторяем, что мы пренебрегаем обменом массой через жидкую перемычку между каплями при отскоке, а также влиянием изменения энергии поверхностного натяжения на температуру капель

Таблица 2.4.

Значения индексов в формулах (а) и (б).

	для (а)		для (б)	
	k=2	f=1	i=1	j=2, ..., N
	k=3	f=1, ..., 2	i=2	j=3, ..., N

	k=N-1	f=1,...,N-2	i=N-2	j=N-1,...,N
	k=N	f=1,...,N-1	i=N-1	j=N
Или				
	l=1	k=2,...,N		
	l=2	k=3,...,N		
		
	l=N-2	k=N-1,...,N		
	l=N-1	k=N		

Покажем также, что в предлагаемой модели столкновений общий импульс капель сохраняется.

Исходя из уравнений (2.66,2.75), для каждого $F_{if} > 0$, при фиксированных i и f , изменение импульса можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta I_{if} = & K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{i \text{ old}}} - K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_i^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{i \text{ old}}} + \\ & + K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1 - \beta_i + \beta_i \cdot F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_i^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{fi}} + \\ & (*) \\ & + K_{if} \cdot e_{if} \cdot (\beta_f - 1 - \beta_i \cdot F_{if} + F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{if}} \end{aligned}$$

Для ΔI_{if} индексы меняются так: $i \in (0, 1, \dots, N-1)$; $f \in (0, 2, \dots, N)$, где N – число групп капель. Перепишем выражение (*) в другом виде:

$$\begin{aligned} \Delta I_{if} = & K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{i \text{ old}}} - K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_i^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{i \text{ old}}} + \\ & (a) \qquad \qquad \qquad (b) \\ & + K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot (W_{p_{i \text{ old}}} - W_{p_{f \text{ old}}}) + \\ & (c) \\ & + K_{if} \cdot e_{if} \cdot (1 - \beta_i + \beta_i \cdot F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_i^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{fi}} + \\ & (d) \\ & + K_{if} \cdot e_{if} \cdot (\beta_f - 1 - \beta_i \cdot F_{if}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{if}} \\ & (e) \end{aligned}$$

Для всего набора индексов i слагаемые вида (a) и (b) можно сгруппировать по парам:

$$\begin{aligned} & K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot (W_{p_{f \text{ old}}} - W_{p_{i \text{ old}}}) = \\ & = K_{if} \cdot e_{if} \cdot F_{if} \cdot [6 \cdot \alpha_{pi} \cdot \alpha_{pf} / (\pi D p_f^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p_{fi \text{ old}}} \end{aligned} \quad (**)$$

а для каждого выражения (**) найдется единственное слагаемое (с) с такими же индексами, поэтому в сумме все слагаемые вида (а), (b) и (с) дадут ноль.

В слагаемом (d) переобозначим индексы:

$$K_{m n} \cdot e_{m n} \cdot (1 - \beta_n + \beta_n \cdot F_{m n}) \cdot [6 \cdot \alpha_{pm} \cdot \alpha_{pn} / (\pi D p_n^3)] \cdot \rho_p \cdot W_{p m n}, \quad m = 0(1, \dots, N-1); \quad n = 0(2, \dots, N),$$

тогда для всего набора индексов i к слагаемому вида (e) найдется единственное слагаемое вида (d), а их сумма также обратится в ноль.

Аналогичные рассуждения справедливы для $F_{if} < 0$.

Таким образом, сумма всех ΔI_{if} равна нулю, то есть общий импульс капель не изменился.

2.7. Учет аэродинамического дробления капель

Механизм дробления капель подробно изложен в работе /140/ (см. фрагмент из книги в Приложении 7), в расчетах он учитывается с помощью экспериментальных зависимостей от локальных средних параметров газа и групп капель, поэтому здесь эта тема не рассматривается. Из расчетов следует, что в зоне высоких скоростей, где $We > We_{\text{критическое}} = 10$ идет менее 1 % массового расхода жидкости. Однако при сопоставлении расчета с экспериментом (см. рис.5.12 п.5.3.2) на эту зону приходится свыше 50 % массового расхода, поэтому при построении математической модели аэродинамическое дробление необходимо учитывать хотя бы для того, чтобы прояснить его роль. Модель аэродинамического дробления строится на основании анализа результатов ряда работ, проведенного в /140/, из которого видно, что капля дробится не мгновенно, а по истечении некоторого времени $\tau_{\text{дробление}}$ после начала силового воздействия:

$$\text{капля не дробится при } We < We_{\text{критическое}} \quad (2.104)$$

$$\tau_{\text{дробление}} = \tau \cdot A \cdot \exp[-(8,4 \cdot 10^{-4} \cdot Re_{\text{критическое}}^{-3,44}) \cdot (1 - We/We_{\text{критическое}})] \quad (2.105)$$

$$\text{при } We \geq We_{\text{критическое}}$$

Здесь полагаем

$$\tau = 3,32 \cdot D p^2 \cdot \rho_p / (4 \cdot \mu_p \cdot L p^{0,5}) - \text{период собственных колебаний капли};$$

$$A = 4,32 - 8,5 \cdot 10^{-4} \cdot Re_{\text{критическое}} - (0,15 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot Re_{\text{критическое}}) \cdot \ln(Lp),$$

$$Re_{\text{критическое}} = Re_p \text{ при } We > We_{\text{критическое}}$$

$$Re_{\text{критическое}} = \rho_p \cdot Dp_{\text{критическое}} \cdot |W_g - W_p| / \mu_g, \text{ при } We = We_{\text{критическое}},$$

где $Dp_{\text{критическое}} = We_{\text{критическое}} \cdot \sigma / (\rho_{\text{gas}} \cdot |W_g - W_p|^2)$, Lp - число Лапласа (см. п.2.6.5).

Если $\tau_{\text{дробление}} < \tau_{\text{свободн пробега}}$ ($\tau_{\text{свободн пробега}} = (N \cdot \pi \cdot Dp^2 \cdot \Delta W_p)^{-1}$, ΔW_p – характерная разность скорости капель), то капля дробиться, в противном случае этого не происходит. Следует отметить, что все равно сохраняется некоторый произвол в выборе $We_{\text{критическое}}$, которое, по данным И.Б.Палатника /105/, может принимать значения от 8 до 23.

2.8. Метод расчета

2.8.1. Метод расчета – метод «крупных частиц»

При численном способе определения характеристик потока интересующая нас область разбивается на части так называемой расчетной сеткой, для каждой ячейки которой справедливы уравнения математической модели. Пример расчетной сетки для сопла представлен на рис.2.5, 2.6. Здесь Z – ось, R – расстояние от оси, φ - угол от базового направления. В осесимметричном случае полагаем $\varphi = 1$ радиан. Важно отметить, что расчетная область включает зону у среза сопла, что позволяет использовать в качестве граничных условий более достоверные данные о параметрах окружающей среды, а не какие-либо предположения о параметрах (в частности – давлении) на срезе.

Стационарное решение системы (2.1-2.12) для всех ячеек расчетной области есть предел функций $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$, где f – параметры потока /10,11/. Параметры потока через некоторый интервал времени Δt от текущего момента времени t_i определяются с использованием подробно описанного в работах /11,87/ метода «крупных частиц». Обоснованию и технологии

использования этого метода в научно-технической литературе уделено достаточно внимания /203/, поэтому в данной работе эти проблемы не рассматриваются.

Полагаем, что параметры потока внутри каждой ячейки распределены равномерно.



Рис.2.5. Схема расчетной области, разбитой сеткой

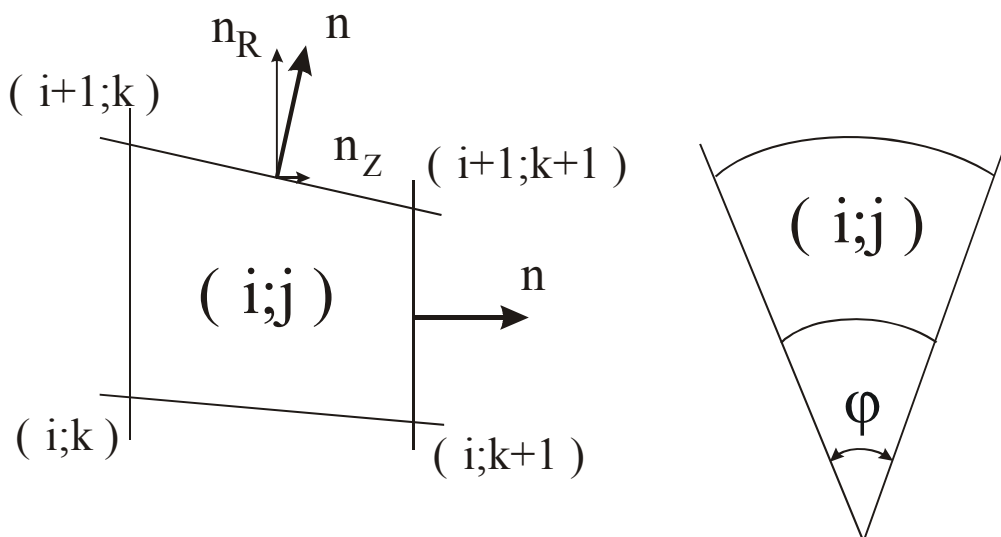


Рис.2.6. Расчетная ячейка, слева сечение в плоскости (Y-Z), справа - в плоскости (φ -Y)

Этапы решения (нахождения значений параметров потока после интервала времени Δt) для какой-либо расчетной ячейки с объемом $Volume$ выглядят следующим образом:

Расчетные формулы для одного временного шага Δt в цилиндрической системе координат:

– этап 1:

$$V_{\text{step}_1} = V_t - (S_{\text{top}} \cdot P_{\text{top}} \cdot |n_{r_{\text{top}}}| - S_{\text{bot}} \cdot P_{\text{bot}} \cdot |n_{r_{\text{bot}}}|) \cdot \Delta t / (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot Volume) + P \cdot \Delta t / (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot r)$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{step}_1} = & U_t - (S_{\text{right}} \cdot P_{\text{right}} - S_{\text{left}} \cdot P_{\text{left}} + S_{\text{top}} \cdot P_{\text{top}} \cdot |n_{z_top}| - \\
& S_{\text{bot}} \cdot P_{\text{bot}} \cdot |n_{z_bot}|) \cdot \Delta t / (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot \text{Volume}) \quad E_{\text{step}_1} = E_t - [S_{\text{top}} \cdot P_{\text{top}} \cdot (V_t \cdot n_{r_top} + U_t \cdot n_{z_top}) - \\
& S_{\text{bot}} \cdot P_{\text{bot}} \cdot (V_t \cdot n_{r_bot} + U_t \cdot n_{z_bot}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot P_{\text{right}} \cdot U_{t_right} - S_{\text{left}} \cdot P_{\text{left}} \cdot U_{t_left}] \cdot \Delta t / (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot \text{Volume}),
\end{aligned}$$

здесь параметры с индексом t соответствуют моменту времени t_i , параметры с индексом step_1 – промежуточные результаты, вычисленные на этапе 1, индекс top соответствует верхней (наиболее удаленной по радиусу от оси) стороне ячейки, bot – нижней стороне, right – правой (наиболее удаленной от входа), left – левой стороне ячейки (см. рис.2.6), без индекса – параметры внутри ячейки. S – площадь соответствующей стороны ячейки, Volume – объем ячейки. V , n_r – компоненты скорости газа и нормали вдоль радиуса, U , n_z – компоненты скорости и нормали вдоль оси симметрии;

– этап 2:

$$\begin{aligned}
\rho_{g_step_2} = & \rho_{g_t} - [S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t})_{\text{top}} \cdot (V_t \cdot n_{r_top} + U_t \cdot n_{z_top}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t})_{\text{bot}} \cdot (V_t \cdot n_{r_bot} + U_t \cdot n_{z_bot}) + S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t})_{\text{right}} \cdot U_{t_right} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t})_{\text{left}} \cdot U_{t_left}] \cdot \Delta t / (\alpha_{g_t} \cdot \text{Volume})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{step}_2} = & \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step}_1} / \rho_{g_step_2} \\
& - [S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step}_1})_{\text{top}} \cdot (V_{\text{step}_1_top} \cdot n_{r_top} + U_{\text{step}_1_top} \cdot n_{z_top}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step}_1})_{\text{bot}} \cdot (V_{\text{step}_1_top} \cdot n_{r_bot} + U_{\text{step}_1_top} \cdot n_{z_bot}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step}_1})_{\text{right}} \cdot U_{\text{step}_1_right} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step}_1})_{\text{left}} \cdot U_{\text{step}_1_left} - \\
& - \Sigma(\alpha_{p_t\ i} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume} \cdot F_{\text{comp r i}})_{i=1, \dots, N}] \cdot \\
& \cdot \Delta t / (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_step_2} \cdot \text{Volume})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{step}_2} = & \rho_{g_t} \cdot U_{\text{step}_1} / \rho_{g_step_2} \\
& - [S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot U_{\text{step}_1})_{\text{top}} \cdot (V_{\text{step}_1_top} \cdot n_{r_top} + U_{\text{step}_1_top} \cdot n_{z_top}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot U_{\text{step}_1})_{\text{bot}} \cdot (V_{\text{step}_1_top} \cdot n_{r_bot} + U_{\text{step}_1_top} \cdot n_{z_bot}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step_1}})_{\text{right}} \cdot U_{\text{step_1_right}} - \\
& -S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot V_{\text{step_1}})_{\text{left}} \cdot U_{\text{step_1_left}} - \\
& - \Sigma (\alpha_{p_t\ i} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume} \cdot F_{\text{comp_r}\ i})_{i=1, \dots, N} \cdot \\
& \cdot \Delta t / (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot \text{Volume})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{step_2}} = \rho_{g_t} \cdot E_{\text{step_1}} / \rho_{g_t} & - [\\
& S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot E_{\text{step_1}})_{\text{top}} \cdot (V_{\text{step_1_top}} \cdot \mathbf{n}_{r_top} + U_{\text{step_1_top}} \cdot \mathbf{n}_{z_top}) - \\
& - \\
& S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot E_{\text{step_1}})_{\text{bot}} \cdot (V_{\text{step_1_top}} \cdot \mathbf{n}_{r_bot} + U_{\text{step_1_top}} \cdot \mathbf{n}_{z_bot}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot E_{\text{step_1}})_{\text{right}} \cdot U_{\text{step_1_right}} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot E_{\text{step_1}})_{\text{left}} \cdot U_{\text{step_1_left}} \cdot \Delta t / (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot \text{Volume}) + \\
& + \Sigma [\alpha_{p_t\ i} \cdot \rho_p \cdot (F_{\text{comp_r}\ i} \cdot V_{\text{step_1}} + F_{\text{comp_z}\ i} \cdot U_{\text{step_1}}) + \alpha_{p_t\ i} \cdot \rho_p \cdot Q_{p\ i}]_{i=1, \dots, N} \\
& \cdot \Delta t / (\alpha_{g_t} \cdot \rho_{g_t} \cdot \text{Volume})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{p_step_2\ i} = \alpha_{p_t\ i} & - [S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{p_t\ i})_{\text{top}} \cdot (V_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{r_top} + U_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{z_top}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{p_t\ i})_{\text{bot}} \cdot (V_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{r_bot} + U_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{z_bot}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{p_t\ i})_{\text{right}} \cdot U_{p_t_right\ i} - S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{p_t\ i})_{\text{left}} \cdot U_{p_t_left\ i} + \\
& + (\Delta M_{\text{small}\ i} + \Delta M_{\text{large}\ i}) \cdot \text{Volume} / \rho_p] \cdot \Delta t / \text{Volume}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{p_step_2\ i} = T_{p_t\ i} & - [S_{\text{top}} \cdot \alpha_{p_t_top\ i} \cdot \rho_p \cdot T_{p_t\ i})_{\text{top}} \cdot (V_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{r_top} + U_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{z_top}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot \alpha_{p_t_bot\ i} \cdot \rho_p \cdot T_{p_t\ i})_{\text{bot}} \cdot (V_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{r_bot} + U_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{z_bot}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot \alpha_{p_t_right\ i} \cdot \rho_p \cdot T_{p_t\ i})_{\text{right}} \cdot U_{p_t_right\ i} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot \alpha_{p_t_left\ i} \cdot \rho_p \cdot T_{p_t\ i})_{\text{left}} \cdot U_{p_t_left\ i} + \\
& + \Delta Q_i \cdot \text{Volume} / C_{\text{part}}] \cdot \Delta t / (\alpha_{p_t\ i} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume}) + \\
& + Q_{p\ i} / C_{\text{part}}
\end{aligned}$$

при $F_{if} > 0 \quad i=1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
V_{p_step_2\ i} = V_{p_t\ i} & - [S_{\text{top}} \cdot \alpha_{p_t_top\ i} \cdot \rho_p \cdot V_{p_t\ i})_{\text{top}} \cdot (V_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{r_top} + U_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{z_top}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot \alpha_{p_t_bot\ i} \cdot \rho_p \cdot V_{p_t\ i})_{\text{bot}} \cdot (V_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{r_bot} + U_{p_t\ i} \cdot \mathbf{n}_{z_bot}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot \alpha_{p_t_right\ i} \cdot \rho_p \cdot V_{p_t\ i})_{\text{right}} \cdot U_{p_t_right\ i} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot \alpha_{p_t_left\ i} \cdot \rho_p \cdot V_{p_t\ i})_{\text{left}} \cdot U_{p_t_left\ i} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[\Delta I_{i r} + \Sigma(\Delta I_{f i r})_{D p f > D p i}] \cdot \text{Volume} + \\
& + \alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume} \cdot F_{\text{comp r i}}] \cdot \Delta t / (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume}) \\
U_{p_{\text{step}_2 i}} = & U_{p_{t i}} - [S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{top}} \cdot (V_{p_{t i}} \cdot n_{r_{\text{top}}} + U_{p_{t i}} \cdot n_{z_{\text{top}}}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{bot}} \cdot (V_{p_{t i}} \cdot n_{r_{\text{bot}}} + U_{p_{t i}} \cdot n_{z_{\text{bot}}}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{right}} \cdot U_{p_{t_{\text{right}} i}} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{left}} \cdot U_{p_{t_{\text{left}} i}} + \\
& + [\Delta I_{i z} + \Sigma(\Delta I_{f i z r})_{D p f > D p i}] \cdot \text{Volume} + \\
& + \alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume} \cdot F_{\text{comp z i}}] \cdot \Delta t / (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume}),
\end{aligned}$$

при $F_{i f} < 0 \quad i=1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
V_{p_{\text{step}_2 i}} = & V_{p_{t i}} - [S_{\text{top}} \cdot \alpha_{p_{t_{\text{top}} i}} \cdot \rho_p \cdot V_{p_{t i}})_{\text{top}} \cdot (V_{p_{t i}} \cdot n_{r_{\text{top}}} + U_{p_{t i}} \cdot n_{z_{\text{top}}}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot \alpha_{p_{t_{\text{bot}} i}} \cdot \rho_p \cdot V_{p_{t i}})_{\text{bot}} \cdot (V_{p_{t i}} \cdot n_{r_{\text{bot}}} + U_{p_{t i}} \cdot n_{z_{\text{bot}}}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot \alpha_{p_{t_{\text{right}} i}} \cdot \rho_p \cdot V_{p_{t i}})_{\text{right}} \cdot U_{p_{t_{\text{right}} i}} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot \alpha_{p_{t_{\text{left}} i}} \cdot \rho_p \cdot V_{p_{t i}})_{\text{left}} \cdot U_{p_{t_{\text{left}} i}} + \\
& + [\Delta I_{i r} + \Delta I_r] \cdot \text{Volume} + \\
& + \alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume} \cdot F_{\text{comp r i}}] \cdot \Delta t / (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume}) \\
U_{p_{\text{step}_2 i}} = & U_{p_{t i}} - [S_{\text{top}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{top}} \cdot (V_{p_{t i}} \cdot n_{r_{\text{top}}} + U_{p_{t i}} \cdot n_{z_{\text{top}}}) - \\
& - S_{\text{bot}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{bot}} \cdot (V_{p_{t i}} \cdot n_{r_{\text{bot}}} + U_{p_{t i}} \cdot n_{z_{\text{bot}}}) + \\
& + S_{\text{right}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{right}} \cdot U_{p_{t_{\text{right}} i}} - \\
& - S_{\text{left}} \cdot (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot U_{p_{t i}})_{\text{left}} \cdot U_{p_{t_{\text{left}} i}} + \\
& + [\Delta I_{i z} + \Delta I_z] \cdot \text{Volume} + \\
& + \alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume} \cdot F_{\text{comp z i}}] \cdot \Delta t / (\alpha_{p_{t i}} \cdot \rho_p \cdot \text{Volume}),
\end{aligned}$$

здесь параметры с индексом step_2 – промежуточные результаты, вычисленные на этапе 2. V_p – компонента скорости капель вдоль радиуса, U_p – компонента скорости капель вдоль оси симметрии. Значения комплекса $\{(\dots)_{\dots}\}$ берутся в зависимости от направления нормальной составляющей скорости к соответствующей стороне ячейки. Если поток вытекает из ячейки, то в скобках используются параметры рассматриваемой ячейки ($i;j$), иначе используются параметры из соответствующей прилегающей ячейки; $F_{\text{comp r}}$ –

компонента силы сопротивления вдоль радиуса, $F_{\text{comp } z}$ – компонента силы сопротивления вдоль оси симметрии;

– этап 3:

$$\alpha_{g_t_step_3} = 1 - \alpha_{p_step_2}$$

$$P_{t_step_3} = [E_{step_2} - \sum (U_{p_step_2} \cdot U_{p_step_2} + V_{p_step_2} \cdot V_{p_step_2})_{i=1, \dots, N} / 2] \cdot \rho_{g_step_2} \cdot (\kappa -$$

1)

$$Q_p = Q_p(T, T_{p_step_2}, Nu, \lambda, \rho_p, D_p)$$

$$F_{\text{comp } i} = F_{\text{comp } i}(U_{p_step_2\ i}, V_{p_step_2\ i}, U_{step_2}, V_{step_2}, \rho_{g_step_2} \dots),$$

$$\Delta M_{\text{small } i} = \Delta M_{\text{small } i}(F_{if}, \dots)$$

$$\Delta M_{\text{large } i} = \Delta M_{\text{large } i}(F_{if}, \dots)$$

$$\Delta I_i = \Delta I_i(F_{if}, \dots)$$

$$\Delta I = \Delta I(F_{if}, \dots)$$

$$\Delta I_{fi} = \Delta I_{fi}(F_{if}, \dots)$$

$$\Delta Q_i = \Delta Q_i(F_{if}, \dots)$$

– этап 4:

$$\rho_{g_t} = \rho_{g_step_2}$$

$$\alpha_{g_t} = \alpha_{g_t_step_3}$$

$$U_{p_t\ i} = U_{p_step_2\ i}$$

$$V_{p_t\ i} = V_{p_step_2\ i}$$

$$\alpha_{p_t\ i} = \alpha_{p_step_2\ i}$$

$$T_{p_t\ i} = T_{p_step_2\ i}$$

$$U_t = U_{step_2}$$

$$V_t = V_{step_2}$$

$$E_t = E_{step_2}$$

то есть параметрам, соответствующим моменту времени t_i , присваиваются значения, вычисленные на втором и третьем этапах, которые соответствуют моменту времени $t_i + \Delta t$.

Расчетные формулы для одного временного шага Δt в декартовой системе координат (ось Z направлена в плоскости симметрии в направлении потока

перпендикулярно к входному сечению сопла, ось R – перпендикулярна плоскости симметрии):

– этап 1:

$$V_{\text{step}_1} = V_t - (S_{\text{top}} \cdot P_{\text{top}} \cdot |n_{r_top}| - S_{\text{bot}} \cdot P_{\text{bot}} \cdot |n_{r_bot}|) \cdot \Delta t / (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot \text{Volume})$$

Остальные формулы остались без изменений, но по-другому рассчитываются площади сторон ячеек. Также внесены изменения в граничные условия:

из симметрии потока относительно плоскости симметрии сопла следует условие непротекания через эту плоскость, фактически это также снос параметров, но при этом радиальная составляющая скорости равна 0.

2.8.2. Изменение расчетной сетки с учетом толщины пленки

Для удобства граница расчетной области проходит не по стенке канала, а по кривой, сглаживающей поверхность пленки. Пробные расчеты показали, что не имеет смысла подправлять сетку на каждом расчетном шаге, поэтому был принят следующий способ учета толщины пленки:

- 1) на первом этапе расчет проводился до получения практически стационарного решения без поправки сетки;
- 2) затем по полученной толщине пленки строилась подходящая гладкая кривая, исправлялась сетка, и расчет продолжался далее до стационарного решения;
- 3) по вновь полученной толщине пленки строилась новая кривая и сравнивалась со старой: если отличие в толщине превышало заданную точность, то повторялся второй этап.

2.8.3. Моделирование выхода пленки из сопла

Подчеркнем, что здесь не ставится задача точно смоделировать распад пленки. Важно просто оценить явление, чтобы понять, насколько сильно пленка влияет на поток у среза сопла.

Для расчетных ячеек, примыкающих к торцу сопла в зоне выхода пленки (см. рис.2.5), ставятся специальные граничные условия. Прежде всего, исходя из известных расхода воды в пленке G_{film} , площади сторон ячеек $S_{бок}$ и заданного в качестве параметра максимально допустимого значения объемной концентрации жидкости $\alpha_p \max$ на границе расчетной ячейки, определяется число ячеек L_{film} , в которые втекает, «вдувается» жидкость. L_{film} – минимальное из натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$\alpha_p \max \cdot \rho_p \cdot G_{film} \sum_{i=L_{tube}+1, \dots, L_{film}} S_{бок i} > G_{film}, \quad (2.106)$$

где L_{tube} – число расчетных ячеек поперек сопла. Для этих ячеек рассчитывается средняя величина α_p для «вдуваемой» жидкости:

$$\alpha_p = \rho_p \cdot W_{film} \sum_{i=L_{tube}+1, \dots, L_{film}} S_{бок i} / G_{film}. \quad (2.107)$$

Так как для максимального соответствия физической картине потока α_p должно стремиться к 1, то у кромки сопла образуется некоторая зона длины X , в которой α_p превышает величину «плотной упаковки сфер», то есть использование модели потока не соответствует физической картине течения.

Предполагаем, что это несоответствие, в первую очередь, проявляется в неверном задании силы сопротивления. Не вдаваясь в тонкости процесса распада пленки, в качестве грубого приближения силы сопротивления в этой зоне, в расчетах используются формулы:

$$F_{сопр r} = K_r \cdot (2 + \sin[\pi(0.5 + x/X)]) \cdot (W_{gr} - W_{pr}) \cdot |W_g - W_p| \cdot Cd_0 \cdot \rho_g \cdot 3 / (4 \cdot \rho_p \cdot D_p), \quad (2.108)$$

$$F_{сопр z} = K_z \cdot (2 + \sin[\pi \cdot x / (X \cdot 2)]) \cdot (W_{gr} - W_{pr}) \cdot |W_g - W_p| \cdot Cd_0 \cdot \rho_g \cdot 3 / (4 \cdot \rho_p \cdot D_p), \quad (2.109)$$

где K_r , K_z – подбираемые константы, X – задаваемая длина аномального участка, x – расстояние конкретной ячейки от среза сопла. Приведенные

формулы учитывают уменьшение продольной и увеличение поперечной составляющих силы сопротивления набора капель. Изменение коэффициента сопротивления согласуется, в частности, с данными /69/, где показано, что струя жидкости тормозится при распаде на капли.

Это аналог элемента жидкой пелены, сходящей со стенки сопла и ориентированной вдоль потока.

2.9. Выводы по главе 2.

В итоге сформулирована математическая модель газочапельного соплового потока с большой долей капель и с учетом пленки, аэродинамического дробления и столкновений капель. При формулировке модели на основании проведенных оценок для базового потока сделаны следующие предположения:

- основное течение осесимметричное или плоское;
- уравнения для описания течения пленки записаны в одномерной постановке;
- не учитывается сила тяжести;
- стенка сопла теплоизолированная;
- процессы внутри капель не рассматриваются (капли однородные);
- теплообмен равновесный;
- коэффициенты трения, взаимодействия капель, взаимодействия потока и пленки определяются по экспериментальным зависимостям;
- законы сохранения массы, импульса и энергии записаны как для сплошных сред – это так называемая многожидкостная модель или модель взаимопроникающих континуумов;
- на каплю действуют только силы аэродинамического сопротивления и плавучести (Архимеда);
- турбулентность не учитывается.

Неоднозначное определение поправок к силе аэродинамического сопротивления, коэффициентов трения между газом и жидкостью, жидкостью и твердой стенкой, а также наличие разных подходов к моделированию взаимодействия капель с пленкой требуют специального исследования. Результаты, полученные автором в этом направлении, приводятся ниже.

Для получения численных решений выбран метод «крупных частиц», реализованный автором в виде программы для ПЭВМ³⁵. В расчетах были введены ограничения на:

- максимальный и минимальный диаметры капель;
- максимальную и минимальную объемные доли капель;
- максимальную и минимальную температуры газа.

³⁵ Графический блок, позволяющий визуализировать результаты расчета, любезно предоставил сотрудник ИПМ РАН И.А.Крюков.